# Inflação Estocástica, Medida Cosmológica e Princípio Holográfico

Fábio Novaes, Bruno Carneiro da Cunha

11 de maio de 2010

# Evolução Cosmológica

- Problema da platitude (planura) $(\Omega \approx 1)$.
- Problema do horizonte $\left(\dfrac{\Delta T}{T} \approx 10^{-4}\right)$.
- Problema das rélicas.

# Evolução Cosmológica

- Problema da platitude (planura) $(\Omega \approx 1)$.
- Problema do horizonte $\left(\frac{\Delta T}{T} \approx 10^{-4}\right)$.
- Problema das rélicas.

Solução (Guth, Vilenkin, Starobinski, Linde): Inflação Cosmológica:

$$\ddot{a} > 0, \qquad \frac{d}{dt}\left(H^{-1}/a\right) < 0, \qquad p < -\frac{1}{3}\rho \tag{1}$$

Modelo comum: FRW mais campo escalar $\phi$.

$$\mathscr{L} = \sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\nabla_a\phi\nabla^a\phi - V(\phi)\right) \tag{2}$$

com métrica $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma^2$ $(M_P^2 = (8\pi G)^{-1} = 1)$.

Quando $\dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$ pequeno, interação com gravitação dominada pela energia potencial: constante cosmológica.

Modelo comum: FRW mais campo escalar $\phi$.

$$\mathscr{L} = \sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\nabla_a\phi\nabla^a\phi - V(\phi)\right) \tag{2}$$

com métrica $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma^2$ ($M_P^2 = (8\pi G)^{-1} = 1$).

Quando $\dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$ pequeno, interação com gravitação dominada pela energia potencial: constante cosmológica.

Vários sucessos: $\Omega$, $\Delta T/T$, rélicas, formação de estruturas, perturbações de polarização, etc.

Modelo comum: FRW mais campo escalar $\phi$.

$$\mathscr{L} = \sqrt{|g|}\left(\frac{1}{2}R - \frac{1}{2}\nabla_a\phi\nabla^a\phi - V(\phi)\right) \tag{2}$$

com métrica $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma^2$ ($M_P^2 = (8\pi G)^{-1} = 1$).

Quando $\dot{\phi}$ e $\ddot{\phi}$ pequeno, interação com gravitação dominada pela energia potencial: constante cosmológica.

Vários sucessos: $\Omega$, $\Delta T/T$, rélicas, formação de estruturas, perturbações de polarização, etc.

Porém, sintonia fina, e vários problemas em definir-se a plausibilidade deste modelo.

Número de "e-foldings":

$$N = \log \frac{a(t_{\text{fim}})}{a(t_{\text{início}})} = \int_{t_{\text{i}}}^{t_{\text{f}}} H(t) dt \propto \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{V(\phi(t))} dt \qquad (3)$$

Necessário $\approx 70$ para espectro de flutuações e dissipação de rélicas.

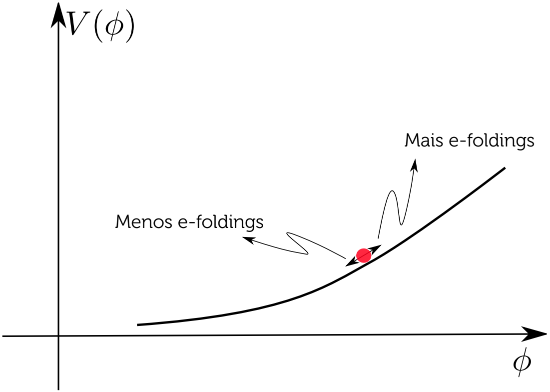
Número de "e-foldings":

$$N = \log \frac{a(t_{\text{fim}})}{a(t_{\text{início}})} = \int_{t_{\text{i}}}^{t_{\text{f}}} H(t)dt \propto \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{V(\phi(t))}dt \qquad (3)$$

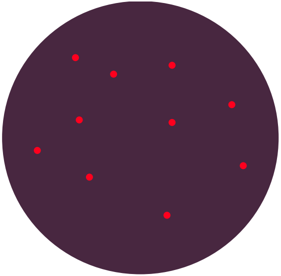
Necessário $\approx 70$ para espectro de flutuações e dissipação de rélicas.

Isso nos dá $a(t_{\text{f}})/a(t_{\text{i}}) \sim 10^{30}$. Condições iniciais com $V$ alto (inflação prolongada) preferidas?

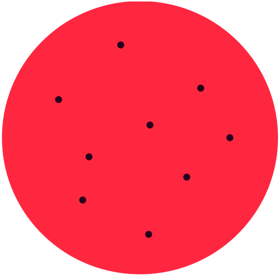
Linde: flutuações quânticas na verdade “empurram” $\phi$ acima no potencial!



# Espaço de fase da Inflação Caótica:



*A priori*



*A posteriori*

Há várias hipóteses sobre a distribuição de estados de gravitação quântica.

Há várias hipóteses sobre a distribuição de estados de gravitação quântica.

Por exemplo (Wald & Hollands): o estado inicial genérico resulta em inflação ou é ergodicamente mais aceitável começar com um estado especial com as características desejadas?

Há várias hipóteses sobre a distribuição de estados de gravitação quântica.

Por exemplo (Wald & Hollands): o estado inicial genérico resulta em inflação ou é ergodicamente mais aceitável começar com um estado especial com as características desejadas?

Claramente rompe unitariedade. Contra-intuitivo.

Há várias hipóteses sobre a distribuição de estados de gravitação quântica.

Por exemplo (Wald & Hollands): o estado inicial genérico resulta em inflação ou é ergodicamente mais aceitável começar com um estado especial com as características desejadas?

Claramente rompe unitariedade. Contra-intuitivo.

Pode-se fazer melhor?

# Princípio Holográfico

$$S_{\text{bn}} = \frac{A}{4G_N} \tag{4}$$

- Resultado padrão de TQC em espaços curvos.

# Princípio Holográfico

$$S_{\text{bn}} = \frac{A}{4G_N} \qquad (4)$$

- Resultado padrão de TQC em espaços curvos.
- "Termaliza" com qualquer forma matéria.

# Princípio Holográfico

$$S_{\text{bn}} = \frac{A}{4G_N} \tag{4}$$

- Resultado padrão de TQC em espaços curvos.
- "Termaliza" com qualquer forma matéria.
- Não há interpretação microcanônica universal.

# Termodinâmica de de Sitter

Gibbons & Hawking: $S = A/4G_N$ também pode ser associada a horizontes cosmológicos – como aqueles que acontecem em inflação.

Neste caso a entropia (área) *diminui* com o aumento da energia.

# Termodinâmica de de Sitter

Gibbons & Hawking: $S = A/4G_N$ também pode ser associada a horizontes cosmológicos – como aqueles que acontecem em inflação.

Neste caso a entropia (área) *diminui* com o aumento da energia.

't Hooft, Susskind: $A/4G_N$ pode ser visto como o número máximo de graus de liberdade em um sistema gravitacional.

# Mecanismo de Inflação

Gibbons, Hawking & Stewart (1987): Medida canônica $d\Pi \wedge d\phi$ no espaço de órbitas é infinita. "Cutoff" dependente de parâmetros físicos (como, p. ex., $\rho_{\text{máx}}$) é fundamental.

# Mecanismo de Inflação

Gibbons, Hawking & Stewart (1987): Medida canônica $d\Pi \wedge d\phi$ no espaço de órbitas é infinita. "Cutoff" dependente de parâmetros físicos (como, p. ex., $\rho_{\text{máx}}$) é fundamental.

Gibbons & Turok (2006): "Cutoff" para universos muito planos leva à conclusão que universos com número grande de "e-foldings" são exponencialmente suprimidas. Cosmólogos não concordam.

# Mecanismo de Inflação

Gibbons, Hawking & Stewart (1987): Medida canônica $d\Pi \wedge d\phi$ no espaço de órbitas é infinita. "Cutoff" dependente de parâmetros físicos (como, p. ex., $\rho_{\text{máx}}$) é fundamental.

Gibbons & Turok (2006): "Cutoff" para universos muito planos leva à conclusão que universos com número grande de "e-foldings" são exponencialmente suprimidas. Cosmólogos não concordam.

Princípio Holográfico *à la* 't Hooft & Susskind pode ser visto como um "cutoff" natural para definição de medida no espaço de geometrias?

# Formalismo Hamiltoniano

ADM: graus de liberdade são a métrica espacial $h_{ab}$ e o momento conjugado:

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{h}_{ab}} = \sqrt{h}(K^{ab} - Kh^{ab}), \quad \text{onde} \quad K_{ab} = \frac{1}{2}\mathscr{L}_n h_{ab} = \frac{1}{2N}\dot{h}_{ab}. \tag{5}$$

O *vínculo* $\mathscr{H} = 0$ é a contraparte hamiltoniana da componente $t - t$ das equações de Einstein:

$$\mathscr{H} = \sqrt{h}N\left[-^{(D-1)}R + h^{-1}\left(\pi^{ab}\pi_{ab} - \frac{1}{D-2}(\pi^a{}_a)^2 + \frac{1}{2}\Pi^2\right) + V(\phi)\right] \tag{6}$$

# Cosmologia Isotrópica e Homogênea

Estamos interessados em expansão de volumes ($\theta = \dot{a}/a$):

$$K_{ab} = \frac{1}{N}\theta\, h_{ab}, \quad \text{e} \quad \pi^{ab} = -\frac{D-2}{N}\theta\, \sqrt{h} h^{ab} \tag{7}$$

A variável dinâmica natural é o elemento de volume $\sqrt{h}$ e seu momento conjugado

$$\frac{\partial S}{\partial \sqrt{h}} = \frac{\partial S}{\partial h_{ab}} \frac{\partial h_{ab}}{\partial \sqrt{h}} = \frac{2}{\sqrt{h}} h_{ab} \frac{\partial S}{\partial h_{ab}} = \frac{2}{\sqrt{h}}\pi = -\frac{2(D-1)(D-2)}{N}\theta \tag{8}$$

Tomaremos $N = 1$ no que se segue.

# Hamilton-Jacobi e Wheeler-DeWitt

$$-\frac{1}{4(D-1)(D-2)}\left(\sqrt{h}\frac{\partial S}{\partial\sqrt{h}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2+h(V(\phi)-{}^{(D-1)}R)=0 \tag{9}$$

# Hamilton-Jacobi e Wheeler-DeWitt

$$-\frac{1}{4(D-1)(D-2)}\left(\sqrt{h}\frac{\partial S}{\partial\sqrt{h}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial\phi}\right)^2+h(V(\phi)-{}^{(D-1)}R)=0 \qquad (9)$$

Pode ser quantizado diretamente

$$\sqrt{h}\frac{\partial S}{\partial\sqrt{h}}\to -i\frac{\partial}{\partial(\log\ \sqrt{h})}=-i\frac{\partial}{\partial\psi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial S}{\partial\phi}\to -i\frac{\partial}{\partial\phi}, \qquad (10)$$

Chegando à equação do modo zero do campo de Liouville ($\phi$ reescalado):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}+e^{2\psi}(V(\phi)-{}^{(D-1)}R)\right]\Psi=0 \qquad (11)$$

# Acoplando o Princípio

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\psi^2} - \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + e^{2\psi}\left(V(\phi) - {}^{(D-1)}R\right)\right]\Psi = 0$$

$\psi \sim$ tempo. Note que fracamente interagente ($R \sim e^{-\frac{2}{D-1}\psi}$) quando $\psi \to -\infty$: estados assintóticos no Big Bang.

Interpretação: partícula com massa $\mu$ em um espaço-tempo bidimensional com métrica conformemente plana dada por $\sqrt{|g|} = e^{2\psi}(V(\phi) - Ke^{-\frac{2}{D-1}\psi})/\mu$.

Curiosamente, problemas em $\sqrt{|g|} \to 0$ podem ser estudados por TQC em espaços curvos (geometria de aproxima de Milne $\psi \to -\infty$ e FRW plano e dominado por poeira $\sqrt{|g|} \to 0$.)

Curiosamente, problemas em $\sqrt{|g|} \to 0$ podem ser estudados por TQC em espaços curvos (geometria de aproxima de Milne $\psi \to -\infty$ e FRW plano e dominado por poeira $\sqrt{|g|} \to 0$.)

Problemas melhor tratados em segunda quantização. Vamos nos ater a gravitação fracamente interagente $V(\phi) \gg Ke^{-\frac{2}{D-1}\psi}$.

Quantidade relevante, densidade de estados, é calculada usando o propagador em pontos coincidentes (generalização de DeWitt para o formalismo de tempo próprio de Schwinger).

$$\mathscr{P} = \lim_{x \to x'} \langle x | G | x' \rangle = \mathrm{Im} \lim_{x \to x'} G^{(1)}(x, x') \tag{12}$$

(cf. a identidade $2\pi i \delta(x) = 1/(z - i\epsilon) - 1/(z + i\epsilon)$.)

Quantidade relevante, densidade de estados, é calculada usando o propagador em pontos coincidentes (generalização de DeWitt para o formalismo de tempo próprio de Schwinger).

$$\mathscr{P} = \lim_{x \to x'} \langle x|G|x' \rangle = \mathrm{Im} \lim_{x \to x'} G^{(1)}(x,x') \tag{12}$$

(cf. a identidade $2\pi i \delta(x) = 1/(z - i\epsilon) - 1/(z + i\epsilon)$.)

Expansão em termos do intervalo:

$$\left( \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{\tau}\frac{d}{d\tau} - \frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\tau}\frac{d}{d\tau} + \mu^2 \right) G^{(1)}(\tau) = \delta(\tau) \tag{13}$$

Onde $\Delta$ é o determinante de van Vleck:

$$\Delta(x,x') = -g^{1/2}(x) g^{1/2}(x') \det(\nabla_a \nabla_{a'} \delta(x,x')) = 1 + \frac{1}{12} R\tau^2 + \mathscr{O}(\tau^4) \tag{14}$$

# Expansão assintótica

Da forma de Hadamard,

$$G(\tau) = W(\tau)\log(\tau) + V(\tau) \tag{15}$$

temos a parte dependente de $V(\phi)$

$$\mathscr{P} = \ldots + \frac{R}{12\pi} + \mathscr{O}(\tau, R^2) \tag{16}$$

Para a "geometria" definida pela equação de WdW:

$$R = \frac{e^{-2\psi}}{V}\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\log V(\phi)\right) \tag{17}$$

Usando o princípio holográfico, impomos cut-off tal que $\mathscr{N} \sim a^{D-2} \sim e^{\frac{D-2}{D-1}\psi}$. Faz sentido em uma teoria sem vácuo invariante de Poincaré.

# Conclusões e Questões abertas

Introduzindo o parâmetro de “slow-roll”, $\epsilon = V'/V$, vemos que a região de inflação está em uma pequena parte do espaço de fase:

$$\epsilon_{\text{máx}} \sim e^{\frac{D-2}{D-1}\psi} \tag{18}$$

“fine tunning”.

# Conclusões e Questões abertas

Introduzindo o parâmetro de "slow-roll", $\epsilon = V'/V$, vemos que a região de inflação está em uma pequena parte do espaço de fase:

$$\epsilon_{\text{máx}} \sim e^{\frac{D-2}{D-1}\psi} \tag{18}$$

"fine tunning".

- Volume do espaço de parâmetros corrigido pela curvatura. Princípio holográfico entra como limite.

# Conclusões e Questões abertas

Introduzindo o parâmetro de “slow-roll”, $\epsilon = V'/V$, vemos que a região de inflação está em uma pequena parte do espaço de fase:

$$\epsilon_{\text{máx}} \sim e^{\frac{D-2}{D-1}\psi} \tag{18}$$

“fine tunning”.

- Volume do espaço de parâmetros corrigido pela curvatura. Princípio holográfico entra como limite.
- A menos que $V$ seja bastante pequeno, espaço de fase dominado por evoluções não inflacionárias.

# Conclusões e Questões abertas

Introduzindo o parâmetro de "slow-roll", $\epsilon = V'/V$, vemos que a região de inflação está em uma pequena parte do espaço de fase:

$$\epsilon_{\text{máx}} \sim e^{\frac{D-2}{D-1}\psi} \tag{18}$$

"fine tunning".

- Volume do espaço de parâmetros corrigido pela curvatura. Princípio holográfico entra como limite.
- A menos que $V$ seja bastante pequeno, espaço de fase dominado por evoluções não inflacionárias.
- Contagem de índice da geometria: Papel dos vácuos de $V$?

# Conclusões e Questões abertas

Introduzindo o parâmetro de "slow-roll", $\epsilon = V'/V$, vemos que a região de inflação está em uma pequena parte do espaço de fase:

$$\epsilon_{\text{máx}} \sim e^{\frac{D-2}{D-1}\psi} \tag{18}$$

"fine tunning".

- Volume do espaço de parâmetros corrigido pela curvatura. Princípio holográfico entra como limite.
- A menos que $V$ seja bastante pequeno, espaço de fase dominado por evoluções não inflacionárias.
- Contagem de índice da geometria: Papel dos vácuos de $V$?
- Teoria quantizada: resolução de singularidades, etc.

# Conclusões e Questões abertas

Introduzindo o parâmetro de "slow-roll", $\epsilon = V'/V$, vemos que a região de inflação está em uma pequena parte do espaço de fase:

$$\epsilon_{\text{máx}} \sim e^{\frac{D-2}{D-1}\psi} \tag{18}$$

"fine tunning".

- Volume do espaço de parâmetros corrigido pela curvatura. Princípio holográfico entra como limite.
- A menos que $V$ seja bastante pequeno, espaço de fase dominado por evoluções não inflacionárias.
- Contagem de índice da geometria: Papel dos vácuos de $V$?
- Teoria quantizada: resolução de singularidades, etc.

# Conclusões e Questões abertas

Introduzindo o parâmetro de "slow-roll", $\epsilon = V'/V$, vemos que a região de inflação está em uma pequena parte do espaço de fase:

$$\epsilon_{\text{máx}} \sim e^{\frac{D-2}{D-1}\psi} \tag{18}$$

"fine tunning".

- Volume do espaço de parâmetros corrigido pela curvatura. Princípio holográfico entra como limite.
- A menos que $V$ seja bastante pequeno, espaço de fase dominado por evoluções não inflacionárias.
- Contagem de índice da geometria: Papel dos vácuos de $V$?
- Teoria quantizada: resolução de singularidades, etc.

*Obrigado!*