

Introductory school on Advanced
METHODS IN GAUGE THEORY AND GRAVITATION

Buracos Negros em Relatividade Geral

Campina Grande, Brazil 2010

Bruno Carneiro da Cunha

Departamento de Física – Universidade Federal de Pernambuco



Campina Grande – 23 de maio de 2010



- 1 Física do Colapso Gravitacional
- 2 Métrica de Schwarzschild
 - Extensão de Kruskal
- 3 Reissner-Nordström
- 4 Kerr e Kerr-Newman
- 5 Lições gerais
- 6 Termodinâmica
- 7 Buracos Negros em SUGRA



Buracos Negros

- Gravitação Newtoniana: Pressão de Fermi eletrônica pode suportar um corpo contra a própria gravidade se ($c = 1$):

$$M \propto \left(\frac{\hbar}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{m_B^2} \sim M_\odot \quad (1)$$

- Em RG, métrica $ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + h(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2$.
Fluido perfeito (estático) $T_{ab} = \rho u_a u_b + P(u_a u_b + g_{ab})$. $u^a = e^{-\phi} \partial_t$.
Equações de Einstein:

$$G_{tt} : \quad h(r) = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}, \quad m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

$$G_{rr} : \quad \frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m(r))}$$

Componentes restantes: Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff:

$$\frac{dP}{dr} = -(P + \rho) \frac{m(r) + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m(r))} \quad (2)$$

- Precisa-se de um $\rho(r)$ maior para equilíbrio em RG.
- Para $R \geq \sqrt{1/3\pi\rho}$, ou $R \leq 9M/4$ não existe equilíbrio à densidade constante
- Assumindo uma equação de estado razoável $P = P(\rho)$, pode-se provar a existência de um limite superior para M
- Tomando $\rho_0 \sim$ densidades nucleares e comportamento plausível acima de ρ_0 , chega-se a

$$M_{\text{máx.}} \sim (2 - 3)M_{\odot}$$

Fase final do colapso: teorema de Birkhoff: Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2$$

Problemas em $r = 2M$ pode ser devido a singularidades físicas, ou falha nas coordenadas.

Fase final do colapso: teorema de Birkhoff: Métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega^2$$

Problemas em $r = 2M$ pode ser devido a singularidades físicas, ou falha nas coordenadas.

Preâmbulo: métrica de Rindler:

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2$$

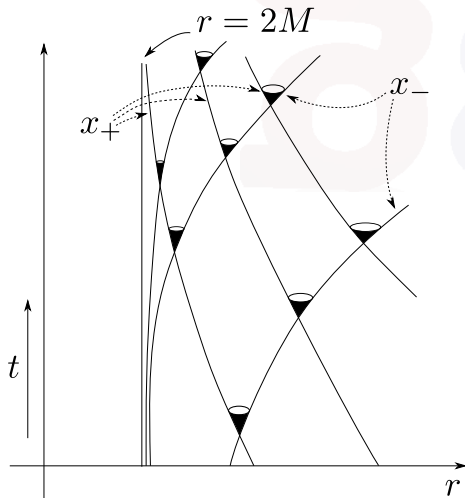
problema em $x = 0$ pode ser resolvido mediante a mudança de coordenadas

$$T = x \sinh t, \quad X = x \cosh t \quad \implies \quad ds^2 = -dT^2 + dX^2$$

Q: como achar uma mudança de coordenadas que resolva "singularidades" métricas?

Na métrica de Schwarzschild, trajetórias (geodésicas) nulas satisfazem:

$$dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r}} \rightarrow x_{\pm} = t \pm \left[r + 2M \log(r - 2M) \right]$$



Escrevendo métrica em termos de x_{\pm} :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dx_+ dx_- + r^2 d\Omega^2, \quad 1 - \frac{2M}{r} = \frac{e^{-r/2M}}{r} e^{(x_+ - x_-)/4M}$$

Termos da exponencial podem ser absorvidos por uma redefinição de coordenadas: $X_+ = \exp(x_+/4M)$ e $X_- = -\exp(-x_-/4M)$:

$$ds^2 = -\frac{16M^2 e^{-r/2M}}{r} dX_+ dX_- + r^2 d\Omega^2 = -\frac{32M^2 e^{-r/2M}}{r} (dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2$$

nenhum problema em $r = 2M$ (ou $T = X$): métrica pode ser continuada até $r = 0$ ($R_{abcd}R^{abcd} = 48M^2/r^6$).

$$T = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right), \quad X = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right)$$

Horizonte é o lugar onde a simetria de translação temporal $t^a = \partial_t$ "anula-se": $g_{tt} = -(1 - 2M/r) = 0$. Em termos das coordenadas de Kruskal:

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{r}{8M^2} \left(X \frac{\partial}{\partial T} + T \frac{\partial}{\partial X} \right)$$

paralelo ao horizonte $X = T$. Temos norma nula e

$$\nabla_a t_b = \frac{8M^3}{r^3} e^{-r/2M} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) (dT)_{[a} (dX)_{b]}$$

A quantidade κ , calculada em $r = 2M$:

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla^a t^b) (\nabla_a t_b) = \frac{M^2}{r^4} \Big|_{r=2M} \longrightarrow \kappa = \frac{1}{4M},$$

é a aceleração no horizonte. Numericamente igual a uma força exercida no infinito para manter uma partícula estacionária em $r = 2M$.

Da transformação de coordenadas:

$$X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{r/2M}, \quad \frac{t}{4M} = \text{arc tgh}\left(\frac{T}{X}\right)$$

$r > 2M$ cobre apenas $X > T, X > 0$. O que são as outras regiões?

Da transformação de coordenadas:

$$X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)e^{r/2M}, \quad \frac{t}{4M} = \text{arc tgh}\left(\frac{T}{X}\right)$$

$r > 2M$ cobre apenas $X > T, X > 0$. O que são as outras regiões?

A forma de geodésicas nulas é inalterada por uma transformação conforme da métrica:

$$g_{ab} \rightarrow \tilde{g}_{ab} = e^{2\psi} g_{ab}, \quad k^a \nabla_a k^b = 0 \rightarrow k^a \tilde{\nabla}_a k^b = (2k^c \nabla_c \psi) k^b$$

Estrutura causal inalterada. Via transformação de escala, podemos estudar o infinito:

$$ds^2 = -dt^2 + d\mathbf{r}^2 = \frac{-dpdq + \frac{1}{4} \text{sen}^2(p - q) d\Omega^2}{\cos p \cos q}$$

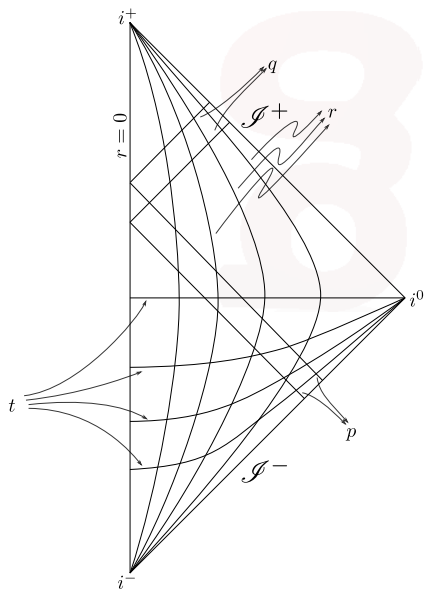
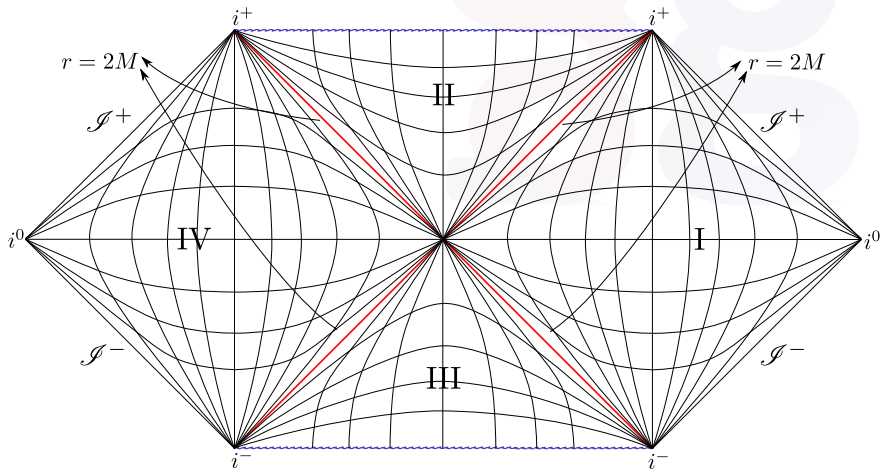


Diagrama Causal para Coordenadas de Kruskal



Reissner-Nordström

Buraco Negro com massa M e carga e .

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}} + r^2 d\Omega^2$$

usando o mesmo método, introduzimos coordenadas $x_{\pm} = t \pm r^*$ onde

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}} = r + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \log(r - r_+) - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \log(r - r_-), \quad e^2 < m^2$$

com r_{\pm} as raízes de g_{tt} . Definindo novas coordenadas

$$X_{\pm} = \pm \exp\left(\pm \frac{r_+ - r_-}{4r_+^2} x_{\pm}\right)$$

Chega-se à métrica

$$ds^2 = \frac{4r_+^4}{(r_+ - r_-)^2} \frac{(r - r_-)^{r_-^2/r_+^2} e^{-\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} r}}{r^2} dX_+ dX_- + r^2 d\Omega^2$$

Com r definido implicitamente:

$$X_- X_+ = - \exp\left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} r^*\right)$$

em termos das novas variáveis, X_{\pm} podem ser continuados além de $r = r_+$ ($X_+ = 0$ ou $X_- = 0$). Métrica pode ser continuada além de $r = r_-$ via outra transformação de coordenadas.

E, novamente, a derivada covariante de ∂_t

$$\nabla_a t_b = -\frac{2}{r^3}(Mr - e^2)(dt)_{[a}(dr)_{b]}$$

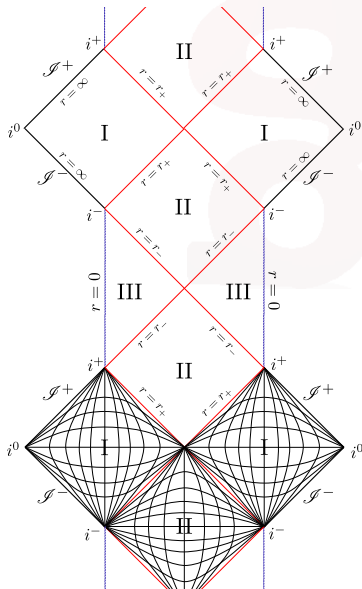
resulta em κ é constante no horizonte $r = r_+$:

$$\kappa^2 = \frac{(Mr - e^2)^2}{r^6} \Big|_{r=r_+} \longrightarrow \kappa = \frac{(M^2 - e^2)^{1/2}}{2M[M + (M^2 - e^2)^{1/2}] - e^2}$$

Mais uma vez, há uma singularidade física em $r = 0$:

$$R_{abcd}R^{abcd} = \frac{8(6M^2r^2 - 12Mre^2 + 7e^4)}{r^8}$$

Diagrama Causal para Reissner-Nordström



Perto do Horizonte

Fazendo $r = r_+ + y$, $y \ll 1$, parte $r - t$ da métrica se torna:

$$ds^2 \simeq -\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} y dt^2 - \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \frac{dy^2}{y} = -\frac{r_+ - r_-}{4r_+^2} x^2 dt^2 + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} dx^2$$

Rindler! Parte do espaço de Minkowski.

Perto do Horizonte

Fazendo $r = r_+ + y$, $y \ll 1$, parte $r - t$ da métrica se torna:

$$ds^2 \simeq -\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} y dt^2 - \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \frac{dy^2}{y} = -\frac{r_+ - r_-}{4r_+^2} x^2 dt^2 + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} dx^2$$

Rindler! Parte do espaço de Minkowski.

Quando $r_+ = r_-$, contudo, temos um comportamento diferente:

$$ds^2 \simeq -\frac{x^2}{r_+^2} dt^2 + \frac{r_+^2}{x^2} dx^2$$

AdS₂! Espaço de curvatura constante negativa. Isometrias agora incluem uma "dilatação":

$$\xi^a = -t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x}$$

Estrutura causal de AdS_2 é obtida via uma série de mudança de coordenadas:

$$X_0 = \frac{x}{2} \left[\frac{1}{x^2} - t^2 + 1 \right], \quad X_1 = xt, \quad X_2 = \frac{x}{2} \left[\frac{1}{x^2} - t^2 - 1 \right]$$

Chega-se à imersão isométrica de AdS_2 em $\mathbb{R}^{2,1}$:

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 - dX_2^2$$

Com $X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 = 1$. Agora, façamos:

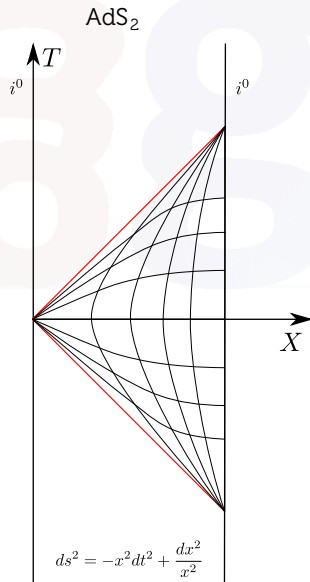
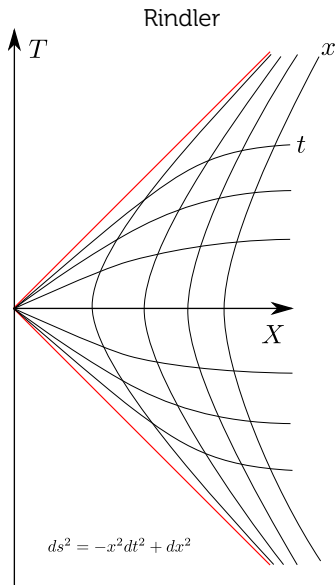
$$X_0 = \cosh r \cos T, \quad X_1 = \sinh r, \quad X_2 = \cosh r \sin T$$

E chega-se à métrica global de anti-de Sitter ($\cosh r = 1/\sin X$):

$$ds^2 = -\cosh^2 r dT^2 + dr^2 = \frac{-dT^2 + dX^2}{\sin^2 X}$$

Espaço agora pode ser continuado para todo T . Estrutura causal curiosa: raios de luz chegam a $X = \pi$ com parâmetro afim finito!

A Geometria Perto do Horizonte



Kerr-Newman

Solução para um buraco negro com carga e momento angular.

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi + \\ + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right] \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2$$

$$A_a = -\frac{er}{\Sigma} [(dt)_a - a \sin^2 \theta (d\phi)_a], \text{ e}$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr$$

$a = J/M$ é uma medida do momento angular do buraco negro.

Horizonte em $r = r_{\pm} = M \pm (M^2 - a^2 - e^2)^{1/2}$. Aceleração da gravidade:

$$\kappa = \frac{(M^2 - a^2 - e^2)^{1/2}}{2M[M + (M^2 - a^2 - e^2)^{1/2}] - e^2}$$

constante no horizonte, assim como a velocidade angular:

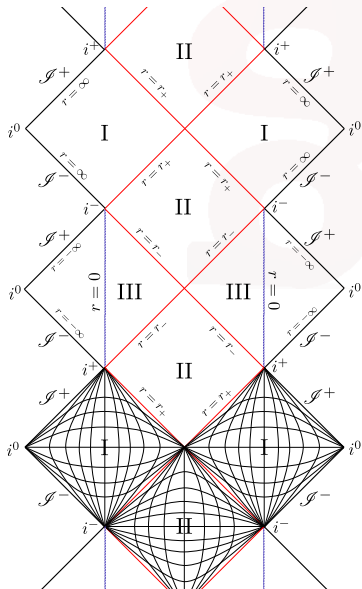
$$\Omega_H = \frac{a}{r_+^2 + a^2}$$

Estrutura causal complicada. Singularidade física em

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta = 0$$

tem a topologia de um anel S^1 .

Diagrama para Kerr



Lições das Soluções de Buracos Negros

- Singularidades escondidas atrás de horizontes de eventos.
- Horizontes em $r = r_+$ são estáveis por pequenas perturbações da métrica. Não bifurca.
- Horizonte é definido pela região onde a simetria de translação temporal se anula.
- κ e Ω_H são constantes no horizonte.
- Métrica perto do horizonte \sim Rindler (caso não extremo).

Área do horizonte

Pode-se mostrar que $\nabla_a \chi_b = \kappa \epsilon_{ab}$. Binormal na direção " $r - t$ ", se contraído com o elemento de volume, nos dá um elemento de área natural no horizonte: $A[\mathcal{H}]$.

Área do horizonte

Pode-se mostrar que $\nabla_a \chi_b = \kappa \epsilon_{ab}$. Binormal na direção " $r - t$ ", se contraído com o elemento de volume, nos dá um elemento de área natural no horizonte: $A[\mathcal{H}]$.

Eq. de Raychaudhuri:

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \hat{\sigma}_{ab}\hat{\sigma}^{ab} + \hat{\omega}_{ab}\hat{\omega}^{ab} - R_{ab}k^ak^b$$

Se $R_{ab}k^ak^b \geq 0$, área do horizonte não pode diminuir.

Termodinâmica de Buracos Negros

Lei zero: se a equação de Einstein é válida com matéria satisfazendo a condição dominante de energia ($-T^a_b v^b$ é tipo tempo ou nulo para qualquer v^a tipo tempo), então κ tem que ser constante sobre um horizonte de Killing.

Termodinâmica de Buracos Negros

Lei zero: se a equação de Einstein é válida com matéria satisfazendo a condição dominante de energia ($-T^a_b v^b$ é tipo tempo ou nulo para qualquer v^a tipo tempo), então κ tem que ser constante sobre um horizonte de Killing.

Um buraco negro estacionário tem um horizonte de eventos que é um horizonte de Killing. κ deve ser constante.

Termodinâmica de Buracos Negros

Lei zero: se a equação de Einstein é válida com matéria satisfazendo a condição dominante de energia ($-T^a_b v^b$ é tipo tempo ou nulo para qualquer v^a tipo tempo), então κ tem que ser constante sobre um horizonte de Killing.

Um buraco negro estacionário tem um horizonte de eventos que é um horizonte de Killing. κ deve ser constante.

Isto implica que (Carter, Robinson, Mazur): na teoria de Einstein com campos EM, as únicas soluções estacionárias e axissimétricas são do tipo Kerr-Newman, parametrizadas por M , e e $J = aM$, com $e^2 + a^2 < M^2$. ("no-hair theorem").

A Primeira Lei

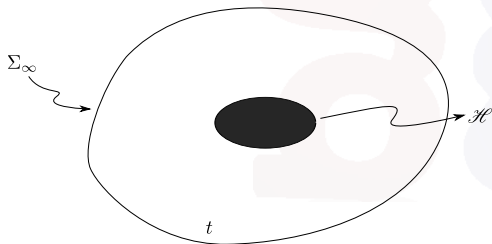
Considere uma teoria invariante por difeomorfismos, que inclua a métrica como variável dinâmica:

$$S = \int L(g_{ab}; R_{abcd}; \nabla_e R_{abcd}; \text{campos de matéria}).$$

Difeomorfismos são simetrias geradas ξ^a , que geram correntes de Nöther $j^a[\xi^b]$. Cargas associadas são conservadas pelo difeomorfismo correspondente.

Por exemplo $M = \int_{t=t_0} j^t[\partial_t]$ e $J = \int_{t=t_0} j^t[\partial_\phi]$. Sob pequenas variações dessas quantidades pode-se transformar essas integrais em variações do fluxo de j^a sobre uma superfície Σ_∞ .

Escolhendo a combinação de ∂_t e ∂_ϕ que se anula no horizonte, podemos trazer a superfície de integração de Σ_∞ para Σ o horizonte de eventos. Assim



Comparando os limites de integração em Σ_∞ e \mathcal{H} :

$$\delta M - \Omega_H \delta J = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S$$

e $S = 1/4A$.

Sumário: Leis da Termodinâmica dos Buracos Negros

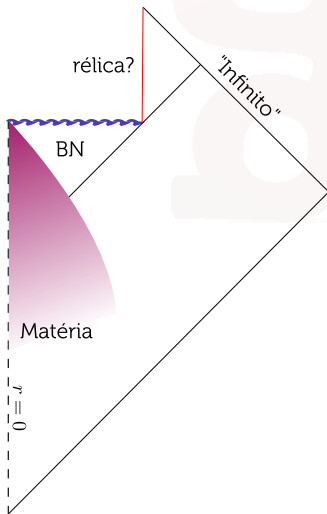
Lei Zero	κ é constante no horizonte.
Primeira Lei	$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G_N} \delta A + \Omega_H \delta J$
Segunda Lei	$S = \frac{1}{4G_N} A$ não decresce.
Terceira Lei	Não se chega a $\kappa = 0$ por meio de processos clássicos.

Sumário: Leis da Termodinâmica dos Buracos Negros

Lei Zero	κ é constante no horizonte.
Primeira Lei	$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G_N} \delta A + \Omega_H \delta J$
Segunda Lei	$S = \frac{1}{4G_N} A$ não decresce.
Terceira Lei	Não se chega a $\kappa = 0$ por meio de processos clássicos.

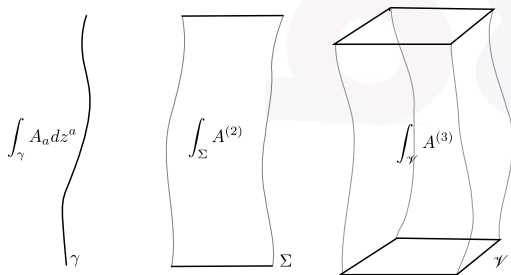
Hawking: Se $\kappa/2\pi$ é a temperatura, buracos negros emitem como um corpo negro. Pela lei de Stefan-Boltzmann $\dot{M} \propto T^4$, evaporação leva um tempo finito.

Resultado da Evaporação?



p-branas

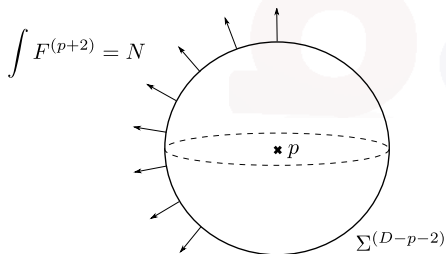
SUGRA: setor bosônico generaliza Einstein-Maxwell: campos de n-formas $F^{(p+2)}$. Acoplamento com "cargas" generalizadas em p dimensões (branas):



$$\text{Com } F^{(p+2)} = dA^{(p+1)} \equiv \partial_{[a_1} A_{a_2 \dots a_{p+1]}^{(p+1)} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_{p+1}}.$$

Soluções eletrostáticas tem energia finita desde que $p < (D - 3)/2$:

$$F^{p+2} = \frac{N}{r^{D-p-2}} \epsilon, \quad r = \text{distância } \perp \text{ à brana}$$



"Dual magnético": $\int *F^{(D-p-3)} = N_m$ advém de um potencial
 $F^{(D-p-3)} = dA^{(D-p-4)} \rightarrow (6 - p)$ -branas.

Buracos Negros em SUGRA

Ação geral advinda de SUGRA:

$$\int d^{10}x \sqrt{-g} \left[e^{-2\phi} (R + 4\nabla_a \phi \nabla^a \phi) - \frac{1}{2} (F^{(p+2)})^2 \right]$$

Cujas equações de movimento associadas são:

$$R_{ab} = -4\nabla_a \phi \nabla_b \phi + \frac{e^{2\phi} (p+2)}{2} \left(F_{a\dots} F_b{}^{\dots} - \frac{p-1}{4(p+2)} F^2 g_{ab} \right)$$
$$\nabla_a F^{a\dots} = 0$$
$$\nabla^2 \phi - (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{4} R = 0$$

Soluções de p-branas

Métrica invariante por simetrias sobre a brana e por rotações nas direções transversas:

$$ds^2 = \underbrace{-e^{2A(r)} dt^2 + e^{2B(r)} dx_i dx^i}_{(p+1) \parallel} + \underbrace{e^{2C(r)} dr^2 + e^{2D(r)} r^2 d\Omega_{8-p}^2}_{(9-p) \perp}$$

Fatores de forma $A(r)$, $B(r)$, $C(r)$, $D(r)$. Solução para o caso elétrico:

$$ds^2 = -H_+(r)H_-(r)^{-1/2} dt^2 + H_-(r)^{1/2} dx^i dx^i + \\ + H_+(r)^{-1} H_-(r)^\gamma dr^2 + r^2 H_-(r)^{\gamma+1} d\Omega_{8-p},$$

$$\gamma = -\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}, \quad H_\pm(r) = 1 - \left(\frac{r_\pm}{r}\right)^{7-p}.$$

e

$$e^\phi = H_-(r)^{(p-3)/4}, \quad {}^*F_{p+2} = N\omega_{8-p}$$

Densidade de massa e carga total:

$$T = \frac{\Omega_{8-p}}{2G_N} \left[(8-p)r_+^{7-p} - r_-^{7-p} \right], \quad N = \frac{7-p}{2} (r_+ r_-)^{(7-p)/2}$$

Métrica também tem singularidade escondida por um horizonte de eventos $r = r_+$. Note que para o caso $p = 3$, ϕ é constante. Nesse caso $F_5 = N(\omega_5 + *\omega_5)$. Métrica próxima a $r = r_+$ é Rindler, a menos que $r_+ = r_-$ (caso extremal), quando:

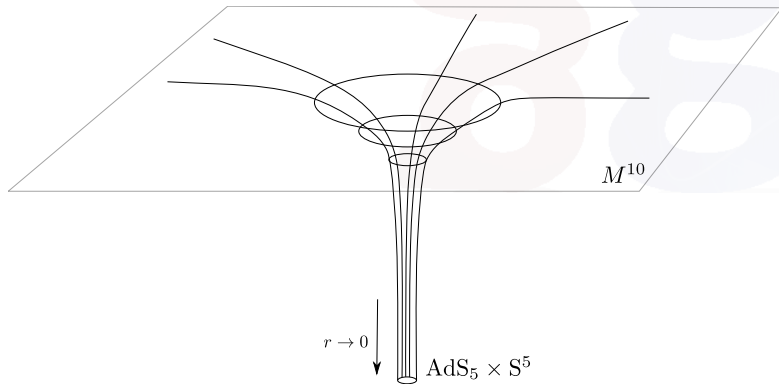
$$ds^2 = \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^{7-p} \right]^{-1/2} (-dt^2 + dx_i dx^i) + \left[1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^{7-p} \right]^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p})$$

Para $r \rightarrow 0$:

$$ds^2 \simeq (r/r_0)^2 (-dt^2 + dx_i dx^i) + (r_0/r)^2 dr^2 + r_0^2 d\Omega_5$$

que é a geometria de $\text{AdS}_5 \times S^5$.

Fatia Espacial



D1-D5

Neste sistema temos Q_1 cargas elétricas para F_3 e Q_5 cargas magnéticas. 5-Branas estão compactificadas em um T^4 e tem momento p_5 na direção x^5 .

Métrica similar:

$$ds^2 = Z_1^{-1/2} Z_5^{-1/2} \left[\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (Z_n - 1)(dt + dx_5)^2 \right] \\ + Z_1^{1/2} Z_5^{1/2} dx_i dx^i + Z_1^{1/2} Z_5^{-1/2} dx_m dx^m \\ e^{-2\phi} = Z_5/Z_1$$

D1-D5

Neste sistema temos Q_1 cargas elétricas para F_3 e Q_5 cargas magnéticas. 5-Branas estão compactificadas em um T^4 e tem momento p_5 na direção x^5 . Métrica similar:

$$ds^2 = Z_1^{-1/2} Z_5^{-1/2} \left[\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + (Z_n - 1)(dt + dx_5)^2 \right] \\ + Z_1^{1/2} Z_5^{1/2} dx_i dx^i + Z_1^{1/2} Z_5^{-1/2} dx_m dx^m \\ e^{-2\phi} = Z_5/Z_1 = (r^2 + r_5^2)(r^2 + r_1^2)$$

$$Z_1 = 1 + \frac{r_1^2}{r^2}, \quad r_1^2 \propto Q_1; \quad Z_5 = 1 + \frac{r_5^2}{r^2}, \quad r_5^2 \propto Q_5$$

$$Z_n = 1 + \frac{r_n^2}{r^2}, \quad r_n^2 \propto p_5$$

Para $r \rightarrow 0$, métrica se decompõe em $AdS_3 \times S^3 \times T^4$. Entropia ($G_E = e^{-\phi/2} G$): $S = A/4 = 2\pi(Q_1 Q_5 n_5)^{1/2}$ foi a primeira a ter uma descrição microcanônica.