Teoria Quântica 1

Nota sobre os coeficientes de reflexão e transmissão por uma barreira de potencial.

Nota: Com uma barreira de potencial de tamanho a e altura de potencial V_0, vimos em sala que as condições de continuidade da função de onda e de sua derivada nos pontos $x = 0$ e $x = a$ implicam, respectivamente, em:

$$\begin{array}{c} A + B = 1 + R \\ A - B = z(1 - R) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} Ae^{iqa} + Be^{-iqa} = Te^{ika} \\ Ae^{iqa} - Be^{-iqa} = zTe^{ika} \end{array} \tag{1}$$

onde

$$k = \sqrt{2mE/\hbar^2}, \quad q = \sqrt{2m(E - V_0)/\hbar^2}, \quad z = \tfrac{k}{q} = \sqrt{E/(E - V_0)} \tag{2}$$

É conveniente colocar o sistema linear acima em uma forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + R \\ z(1 - R) \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} e^{iqa} & e^{-iqa} \\ e^{iqa} & -e^{-iqa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ zT \end{bmatrix} e^{ika}.$$

Agora, usando as inversas das matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} e^{iqa} & e^{-iqa} \\ e^{iqa} & -e^{-iqa} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-iqa} & e^{-iqa} \\ e^{iqa} & -e^{iqa} \end{bmatrix},$$

Podemos resolver para A e B em ambos os sistemas:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + R \\ z(1 - R) \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-iqa} & e^{-iqa} \\ e^{iqa} & -e^{iqa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ zT \end{bmatrix} e^{ika},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + R \\ z(1 - R) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-iqa} & e^{-iqa} \\ e^{iqa} & -e^{iqa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ zT \end{bmatrix} e^{ika}$$

ou ainda, multiplicando à esquerda pela inversa da matriz à esquerda, isolamos o termo dependente de R:

$$\begin{bmatrix} 1 + R \\ z(1 - R) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-iqa} & e^{-iqa} \\ e^{iqa} & -e^{iqa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ zT \end{bmatrix} e^{ika}$$

$$\begin{bmatrix} 1 + R \\ z(1 - R) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos qa & -i \operatorname{sen} qa \\ -i \operatorname{sen} qa & \cos qa \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ zT \end{bmatrix} e^{ika}.$$

Assim teremos um sistema linear com duas equações:

$$1 + R = (\cos qa - iz \operatorname{sen} qa) Te^{ika}$$
$$1 - R = (\cos qa - iz^{-1} \operatorname{sen} qa) Te^{ika}$$

Somando, podemos achar T:

$$T = \frac{e^{-ika}}{\cos qa - \frac{i}{2}(z + z^{-1}) \operatorname{sen} qa}, \tag{3}$$

e substituindo acima, achamos R:

$$R = \frac{-\frac{i}{2}(z - z^{-1}) \operatorname{sen} qa}{\cos qa - \frac{i}{2}(z + z^{-1}) \operatorname{sen} qa}. \tag{4}$$

A partir destes valores podemos calcular as probabilidades de transmissão e reflexão para z real ($E > V_0$):

$$\begin{aligned} t = TT^* &= \frac{e^{-ika}}{\cos qa - \frac{i}{2}(z + z^{-1}) \operatorname{sen} qa} \frac{e^{ika}}{\cos qa + \frac{i}{2}(z + z^{-1}) \operatorname{sen} qa} \\ t &= \frac{1}{\cos^2 qa + \frac{1}{4}(z + z^{-1})^2 \operatorname{sen}^2 qa}. \end{aligned} \tag{5}$$

Da mesma forma, teremos para a probabilidade de reflexão:

$$r = RR^* = \frac{\frac{1}{4}(z - z^{-1})^2 \operatorname{sen}^2 qa}{\cos^2 qa + \frac{1}{4}(z + z^{-1})^2 \operatorname{sen}^2 qa}. \tag{6}$$

Somando t e r devemos ter 1. Usando o teorema de Pitágoras, vamos escrever o numerador de t como $\cos^2 qa + \operatorname{sen}^2 qa = 1$. Assim:

$$t + r = \frac{\cos^2 qa + \operatorname{sen}^2 qa + \frac{1}{4}(z - z^{-1})^2 \operatorname{sen}^2 qa}{\cos^2 qa + \frac{1}{4}(z + z^{-1})^2 \operatorname{sen}^2 qa} = \frac{\cos^2 qa + \frac{1}{4}(z + z^{-1})^2 \operatorname{sen}^2 qa}{\cos^2 qa + \frac{1}{4}(z + z^{-1})^2 \operatorname{sen}^2 qa} = 1.$$

Para $E < V_0$, z é imaginário puro. Escrevendo $q = ib$, temos $\cos qa = \cosh ba$, $\operatorname{sen} qa = i \operatorname{senh} ba$ e $z = -iw$ nas expressões para T (3) e R (4):

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{e^{-ika}}{\cosh ba - \frac{i}{2}(w - w^{-1}) \operatorname{senh} ba}, \\ \bar{R} &= \frac{\frac{i}{2}(w + w^{-1}) \operatorname{senh} ba}{\cosh ba - \frac{i}{2}(w - w^{-1}) \operatorname{senh} ba}. \end{aligned} \tag{7}$$

E as novas probabilidades podem ser calculadas de forma análoga ao caso anterior:

$$\begin{aligned} \bar{t} = \bar{T}\bar{T}^* &= \frac{1}{\cosh^2 ba + \frac{1}{4}(w - w^{-1})^2 \operatorname{senh}^2 ba} \\ \bar{r} = \bar{R}\bar{R}^* &= \frac{\frac{1}{4}(w + w^{-1})^2 \operatorname{senh}^2 ba}{\cosh^2 ba + \frac{1}{4}(w - w^{-1})^2 \operatorname{senh}^2 ba}, \end{aligned} \tag{8}$$

donde se pode verificar que $t + r = 1$ escrevendo o numerador de t como $\cosh^2 ba - \operatorname{senh}^2 ba = 1$. Note que nas expressões acima $w = \sqrt{E/(V_0 - E)}$.