Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

FI-595 – Mecânica Clássica 2

3º Exercício Escolar – 01/07/2017

ATENÇÃO: A prova é composta por 3 questões com pesos iguais. Crédito parcial será dado conforme a demonstração do conhecimento do assunto. O tempo de prova é de 2:00 (duas horas). Letras em negrito referem-se a grandezas vetoriais.

Esta prova contém uma página.

Problema 1: A relação entre energia e as coordenadas ação J_i para o problema de Kepler é dada por:

$$H = E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GMm}{r} = -\frac{2\pi^2 m(GMm)^2}{(J_r + J_\theta + J_\phi)^2}. \tag{1}$$

Note que $J_\phi = 2\pi p_\phi$ e $J_\theta + J_\phi = 2\pi\ell$, onde ℓ é o momento angular total. Suponha que uma inteligência sobre-humana aumenta adiabaticamente a constante de gravitação universal G por um fator $\lambda > 1$.

(a) Calcule a energia e o momento angular das novas órbitas.

(b) Mostre que as órbitas com $E < 0$ manterão sua forma, mas terão seus parâmetros α e ϵ modificados.

(c) Calcule a razão entre o novo e antigo períodos.

[Sugestão: a equação da órbita para o problema de Kepler é $\frac{\alpha}{r} = 1 + \epsilon\cos\theta$, onde $\alpha = \frac{\ell^2}{mk}$, $\epsilon^2 = 1 + \frac{2E\ell^2}{mk^2}$ e $k = GM$. Órbitas com $\epsilon < 1$ são elipses e $\epsilon > 1$ são hipérboles. O período da órbita elíptica é dado por $T = \frac{1}{2}(\pi GM)^2 m|E|^{-3}$.]

Problema 2: Considere a seguinte trajetória parametrizada no espaço-tempo:

$$\gamma : \begin{cases} t = s^2 \\ x = acs^3 \end{cases},$$

onde, além de c, a é constante.

(a) Mantendo a fixo, para quais valores de s a curva pode descrever a trajetória de uma partícula?

(b) Calcule o tempo próprio medido por uma partícula que segue esta trajetória entre os instantes $t = 0$ e $t = t_0$.

(c) O tempo próprio calculado no item anterior tem um valor máximo? Qual?

[Sugestão: o elemento de tempo próprio é dado por $d\tau^2 = dt^2 - c^{-2}dx^2$.]

Problema 3: Considere a ação de uma partícula com linha-mundo dada por $x(t)$:

$$S = -\int dt\, \frac{mc^2 x}{\ell}\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}}.$$

(a) Calcule o momento associado a x e a Hamiltoniana associada a t.

(b) Explique porque podemos entender a ação como a de uma partícula com massa dependente de x. Com base nisso, calcule os pontos de retorno do movimento.

(c) Calcule o momento como função de x para uma trajetória com energia E constante e use o resultado para calcular a variável ação J como função de E. Derive a energia como função de J para calcular o período do movimento. Mostre que temos um oscilador harmônico para energias $E \ll mc^2$.

[Sugestões: $J = \frac{1}{2\pi}\oint p\, dx$, $\quad \int dz\sqrt{1 - a^2z^2} = \frac{z}{2}\sqrt{1 - a^2z^2} + \frac{1}{2a}\operatorname{arcsen}(az)$.]