



FI-595 – Mecânica Clássica 2

2º Exercício Escolar – 23/05/2017

ATENÇÃO: A prova é composta por 3 questões com pesos iguais. Crédito parcial será dado conforme a demonstração do conhecimento do assunto. O tempo de prova é de 2:00 (duas horas). Letras em negrito referem-se a grandezas vetoriais.

Esta prova contém uma página.

Problema 1: Seja a transformação linear no espaço de fase

$$p' = \alpha p + \beta q, \quad q' = \gamma p + \delta q,$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são constantes. Ache a condição para a qual a transformação dada é canônica e escreva a função geratriz em termos de q e q' .

Problema 2: Considere uma partícula em uma dimensão sob a ação do potencial de Morse:

$$H = \frac{p^2}{2m} + Ae^{aq} + Be^{2aq}, \quad m, a, A, B \text{ constantes.}$$

- (a) Construa a variável ação J para o movimento e mostre que para órbitas fechadas, usando a substituição $z = e^{aq}$ e a integral dada abaixo, temos

$$E = -\frac{a^2}{2m} \left(J + \sqrt{\frac{m}{2B}} \frac{A}{a} \right)^2$$

[Sugestão: O fato de J ser real para órbitas fechadas implica em sinais definidos para E, A e B . Explícite estes sinais.]

- (b) Calcule a dependência do período da órbita com a energia.

Dado:

$$\int_1^a \frac{dx}{x} \sqrt{(x-1)(a-x)} = \frac{\pi}{2} (\sqrt{a} - 1)^2.$$

Problema 3: Considere as seguintes funções do espaço de fase de uma partícula com dois graus de liberdade:

$$Q_- = p_1, \quad Q_+ = (q_1^2 - q_2^2)p_1 + 2q_1q_2p_2, \quad Q_3 = q_1p_1 + q_2p_2.$$

- (a) Mostre que os parênteses de Poisson entre os Q s são:

$$\{Q_+, Q_-\} \equiv \sum_i \frac{\partial Q_+}{\partial q_i} \frac{\partial Q_-}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_+}{\partial p_i} \frac{\partial Q_-}{\partial q_i} = 2Q_3, \quad \{Q_{\pm}, Q_3\} = \pm Q_{\pm}.$$

- (b) Mostre que $H = Q_3^2 - Q_+Q_-$ tem parênteses de Poisson nulo com todos os Q s.
- (c) Considere o sistema com dois graus de liberdade que tem H acima como função Hamiltoniana. Neste sistema os Q s são conservados? Use a transformada de Legendre para calcular a Lagrangeana correspondente.