Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

FI-595 – Mecânica Clássica 2

3ª Lista de Exercícios - Entrega dia 09/05/2017

Problema 1: (Goldstein 9.2)

(a) Para um sistema unidimensional com o hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2} - \frac{1}{2q^2},$$

mostre que há uma constante de movimento

$$D = \frac{pq}{2} - Ht.$$

(b) Como uma generalização da parte (a), para o movimento no plano com o hamiltoniano

$$H = |\mathbf{p}|^n - ar^{-n},$$

onde $\mathbf{p}$ é o vetor momento conjugado às coordenadas cartesianas, mostre que há a constante de movimento:

$$D = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{n} - Ht.$$

(c) Qual transformação canônica é gerada se tomarmos D como função geratriz? A transformação resultante é uma simetria?

Problema 2: (Goldstein 9.23) Uma partícula move-se no espaço com um campo magnético $\mathbf{B}$ homogêneo e constante de forma que

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{r})$$

(a) Se v_j são as componentes cartesianas da velocidade da partícula, calcule os parênteses de Poisson

$$\{v_i, v_j\}, \quad i \neq j = 1,2,3.$$

(b) Se p_i são os momentos canônicos conjugados a x_i, também calcule os parênteses de Poisson

$$\{x_i, v_i\}, \quad \{p_i, v_j\}, \quad \{x_i, \dot{p}_j\}, \quad \{p_i, \dot{p}_j\}.$$

(c) Mostre que, na aproximação de campos fortes, $\{x_i, x_j\} \neq 0$ no subespaço do espaço de fase que satisfaz as equações de movimento.

Problema 3: Considere um potencial dado por uma função homogênea: $V(\lambda \mathrm{r}) = \lambda^n V(\mathrm{r})$, com n uma constante. Assuma uma transformação do tipo

$$\mathrm{r} \to \lambda\mathrm{r}, \quad \mathrm{p} \to \mu\mathrm{p}, \quad t \to \alpha t. \tag{1}$$

e encontre uma relação entre λ, μ, α e n de forma que as equações de movimento permaneçam as mesmas. Nesse caso a transformação acima é uma simetria das equações.

(a) Calcule, para o caso acima, a carga de Noether Q associada à simetria.

(b) Verifique que a carga de Noether gera a simetria via o parêntesis de Poisson: $\delta \mathrm{r} = \epsilon\{\mathrm{r},Q\}$.

Problema 4: Considere um corpo rígido em três dimensões com as componentes do momento angular:

$$L_1 = yp_z - zp_y, \quad L_2 = zp_x - xp_z, \quad L_3 = xp_y - yp_x,$$

e as componentes de um vetor posição do centro de massa:

$$N_1 = q_x = x, \quad N_2 = q_y = y, \quad N_3 = q_z = z.$$

(a) Mostre que as componentes de $\vec{L}$ e $\vec{N}$ satisfazem as relações

$$\{L_i,L_j\} \equiv \sum_k \left(\frac{\partial L_i}{\partial q_k}\frac{\partial L_j}{\partial p_k} - \frac{\partial L_i}{\partial p_k}\frac{\partial L_j}{\partial q_k} \right) = \epsilon_{ijk} L_k$$

$$\{L_i,N_j\} = \epsilon_{ijk} N_k, \qquad \{N_i,N_j\} = 0, \qquad \{L^2,L_i\} = 0, \qquad \{L^2,N_i\} = \epsilon_{ijk}(N_j L_k - L_j N_k),$$

onde ϵ_{ijk} é o tensor completamente antissimétrico de Levi-Civita ($\epsilon_{123} = +1$) e $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$.

(b) Considere a hamiltoniana que descreve o chamado *pião de Kovalevskaya*:

$$H = \frac{1}{2I}(L_1^2 + L_2^2 + 2L_3^2) + mghN_1.$$

Calcule a derivada temporal das funções $\xi_\pm$, definidas por

$$\xi_\pm = (L_1 \pm iL_2)^2 - 2mghI(N_1 \pm iN_2).$$

(c) Mostre que $K = \xi_+ \xi_-$ é constante de movimento. Há mais alguma constante de movimento no sistema?

Problema 5: Considere funções reais no círculo $f(\theta) : S^1 \to \mathbb{R}$, $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$. Tais funções podem ser expandidas em uma série de Fourier:

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{in\theta}, \quad f_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta}, \quad f_n = \bar{f}_{-n} \tag{2}$$

Considere agora mudanças de coordenadas do círculo. Vamos estudar as mudanças de coordenadas infinitesimais. Se reparametrizarmos o círculo, teremos $\theta \to \phi(\theta)$, com $\phi(2\pi) = \phi(0)$. Se a mudança for pequena, teremos $\phi \approx \theta + \epsilon\alpha(\theta)$ com ϵ pequeno e $\alpha(\theta)$ periódica. Mostre que a mudança infinitesimal de $f(\theta)$ sob tal variação é dada por

$$\delta f(\theta) = f(\phi(\theta)) - f(\theta) \approx \epsilon\alpha(\theta)\frac{d}{d\theta} f(\theta). \tag{3}$$

Com isto, podemos escrever uma base para tais transformações em termos da série de Fourier de α. Ela é dada em termos dos operadores diferenciais:

$$\hat{D}_n = e^{in\theta}\frac{d}{d\theta} \tag{4}$$

Mostre que o comutador de dois operadores $\hat{D}_n$ e $\hat{D}_m$ é dado por:

$$[\hat{D}_n,\hat{D}_m] = \hat{D}_n\hat{D}_m - \hat{D}_m\hat{D}_n = -(m-n)D_{m+n}. \tag{5}$$