Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

FI-592 – Mecânica Clássica 1

7ª Lista de Exercícios - Entrega dia 20/10/2016

Problema 1: (MT:8-13) Discuta o movimento de uma partícula em um campo de força central que decai com o inverso do quadrado da distância superimposto por uma força cuja magnitude é inversamente proporcional ao cubo da distância da partícula ao centro de força; isto é,

$$F(r) = -\frac{k}{r^2} - \frac{\lambda}{r^3}, \quad k,\lambda > 0. \tag{1}$$

Mostre que o movimento é descrito por uma elipse precessionante. Considere os casos $\lambda < \ell^2/\mu$, $\lambda = \ell^2/\mu$ e $\lambda > \ell^2/\mu$.

Problema 2: (MT:8-14) Ache a lei de força para um campo central que permite que a partícula se mova em uma órbita espiral dada por $r = k\theta^2$, onde k é uma constante.

Problema 3: (Goldstein 3-13): Uma distribuição uniforme de poeira no sistema solar adiciona à atração gravitacional do Sol sobre o planeta uma força adicional da forma:

$$\mathbf{F} = -mC\mathbf{r} \tag{2}$$

onde m é a massa do planeta, C é uma constante que depende da constante da gravitação universal e da densidade de poeira, e r é o raio vetor do Sol ao planeta (considerados como pontos). A força adicional é muito pequena se comparada a força gravitacional direta planeta-Sol.

(a) Calcule o período de uma órbita circular de raio r_0 do planeta sob a ação deste campo combinado.

(b) Calcule o período de pequenas oscilações radiais para perturbações pequenas da órbita circular.

(c) Mostre que órbitas quase circulares podem ser aproximadas por elipses precessionantes e ache a frequência de precessão. Esta precessão é na mesma direção da velocidade angular orbital ou oposta?

Problema 4: Muitas galáxias, inclusive a nossa, possui uma distribuição de poeira (estrelas) em forma de disco que interage apenas via gravitação. Nessas galáxias é observada a relação de *Tully-Fisher*, que essencialmente diz que a velocidade angular de estrelas é constante com a distância do centro $\omega = \omega_0$, para distâncias grandes o suficiente.

(a) Segundo a Lei de Gauss, o potencial gravitacional em um ponto $\mathbf{r}$ do centro depende apenas da quantidade de matéria até aquele ponto. Por outro lado, de acordo com o princípio de Boltzmann, a densidade de estrelas depende da sua energia potencial (veja Goldstein 3-5):

$$\rho(r) = \frac{N}{V} e^{-U(r)/k_B T}, \tag{3}$$

para N um número total de estrelas em um volume V. Use estes dois fatos, juntamente com a relação de Tully-Fisher, para achar a distribuição de matéria na galáxia.

(b) A dificuldade em se observar a distribuição de massa calculada no item anterior fez com que se procurassem outras soluções. Uma delas leva o nome de "MOdified Newtonian Dynamics" e conjectura que, para acelerações muito pequenas a massa inercial começa a decrescer, de forma que

$$F = m(a)a \approx m \frac{a}{a_0} a \tag{4}$$

onde a_0 é uma aceleração constante, que depende da galáxia que consideramos. Para a Via Láctea, $a_0 \approx 1{,}2 \times 10^{-10}$ m/s^2. Mostre que a hipótese acima também nos leva à relação de Tully-Fisher. Como a_0 depende da galáxia considerada, hoje temos um favorecimento dos modelos de matéria escura para explicar a relação de Tully-Fisher.

Referência: http://en.wikipedia.org/wiki/Modified_Newtonian_dynamics