Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

FI-592 – Mecânica Clássica 1

6ª Lista de Exercícios - Entrega dia 13/10/2016

Problema 1: Considere uma partícula de massa m se movendo sob a ação de um campo gravitacional constante na direção z, mas vinculada a um "funil", cuja equação é

$$z = z_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{x^2 + y^2} \right),$$

onde z_0 e ρ são constantes.

(a) Escreva uma função lagrangeana para o sistema.

(b) Ache as quantidades conservadas. A que simetrias elas se relacionam?

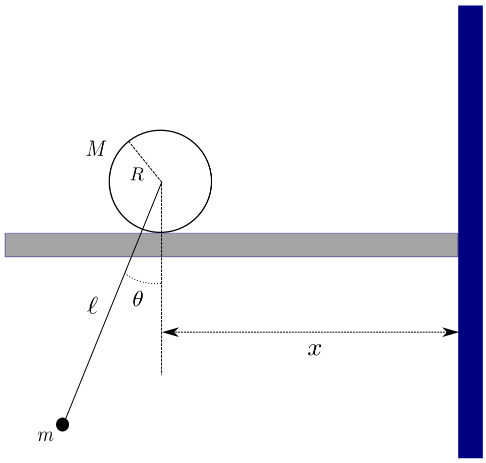
(c) Explicite as condições sob as quais a partícula cairá no funil.

Problema 2: (MT:7-22): Uma partícula de massa m move-se em uma dimensão sob influência de uma força

$$F(x,t) = \frac{k}{x^2} e^{-t/\tau}$$

onde k e τ são constantes positivas. Calcule as funções de Lagrange e Hamilton. Compare a hamiltoniana e a energia total, e discuta a conservação da energia para este sistema.

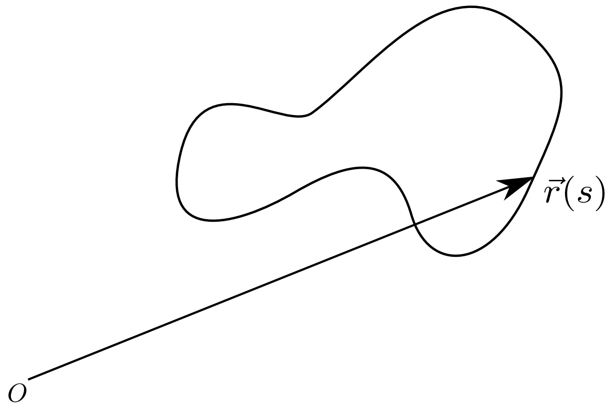
Problema 3: Um cilindro de densidade uniforme, massa M e raio R rola sem deslizar por uma viga horizontal. Uma pequena massa m é suspensa do centro do cilindro sem atrito por uma corda ideal de comprimento ℓ como mostrado.



(a) Escreva o lagrangeano do sistema usando x e θ. Resolva as equações de movimento e ache a frequência de pequenas oscilações da massa m.

(b) Reformule o problema usando o método dos multiplicadores de Lagrange e trate o vínculo de rolagem explicitamente. Ache a força de vínculo horizontal no cilindro. Tenha cuidado para explicitar o sentido da força.

Problema 4: Um laço inextensível de massa M, comprimento L e densidade constante $\mu = M/L$ (ver figura abaixo) pode ser pensado como uma sequência de N pequenos pedaços encadeados, porém livres para se orientar em qualquer direção relativa aos pedaços precedente e sucessor:



Suponha que a conformação do fio é determinada pelo vetor $\vec{r}(s)$, onde s é um parâmetro de comprimento de arco:

$$\left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| = 1,$$

de forma que $0 \leq s \leq L$.

(a) Escreva uma expressão para a energia cinética do laço, separando o movimento translacional e o rotacional.

(b) O laço é colocado para girar com velocidade constante $\vec{\omega}$ ao redor do centro de massa. Mostre que a energia é minimizada quando o laço toma a forma de um círculo, com o vínculo que o comprimento é mantido constante. [Sugestão: Obtenha uma expressão para $d\vec{r}/dt$ considerando o movimento rotacional. Não se esqueça de levar em conta que o laço se fecha $\vec{r}(L) = \vec{r}(0)$.]

Sugestão: considere

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N} \frac{M}{N} f(i) = \frac{M}{L} \int_0^L ds\, f(s)$$