



FI-592 – Mecânica Clássica 1

1ª Lista de Exercícios - Entrega dia 26/08/2016

Problema 1: (MT:1-22,1-27)¹ Alguns exercícios sobre cálculo vetorial:

- (a) Avalie a soma $\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}$ (que contém 81 termos) considerando o resultado para todas as combinações possíveis de i, j, l, m ; isto é: (i) $i = j$, (ii) $i = l$, (iii) $i = m$, (iv) $j = l$, (v) $j = m$, (vi) $l = m$, (vii) $i \neq l$ ou m , (viii) $j \neq l$ ou m . Mostre que

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

e use este resultado para provar que

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}.$$

- (b) Mostre que:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = r^2 \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}$$

onde \mathbf{r} , $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ são funções de t apenas.

Problema 2: (MT:1-28,1-31) Mostre que

$$(a) \nabla r^n = nr^{n-2} \mathbf{r}, \quad (b) \nabla(\ln |r|) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad (c) \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{df}{dr}, \quad (d) \nabla^2(\ln |r|) = \frac{1}{r^2}.$$

Problema 3: Uma partícula percorre uma trajetória no plano dada por $\mathbf{r} = e^{at} \cos t \mathbf{i} + e^{at} \sin t \mathbf{j}$

- (a) Calcule os vetores velocidade e aceleração.
(b) Use a interpretação do produto interno para decompor a aceleração em uma componente paralela à velocidade, \mathbf{a}_{\parallel} , e outra perpendicular à velocidade, \mathbf{a}_{\perp} .
(c) Qual o raio do maior círculo tangente à trajetória da partícula no instante t ?

Problema 4: Mostre que, se A e B são matrizes quadradas:

- (a) $e^{A+B} = e^A e^B$ se e somente se $[A, B] = 0$.
(b) $\det e^A = e^{\text{Tr} A}$.
(c) Se A obedece à equação diferencial

$$\frac{dA}{dt} = [A, B], \tag{1}$$

então $a_n = \text{Tr} A^n$ são conservados, i. e. $\frac{d}{dt} a_n = 0$.

¹Atenção: problemas entre parênteses referem-se à quinta edição do livro-texto.