

# Problema 1.

$$x(t) = \alpha t \cos \omega t \quad y(t) = \alpha t \sin \omega t \quad z(t) = z_0$$

$$a) \quad \hat{e}_1 = \frac{(\alpha \cos \omega t - \alpha \omega t \sin \omega t) \hat{i} + (\alpha \sin \omega t + \alpha \omega t \cos \omega t) \hat{j}}{\alpha (1 + \omega^2 t^2)^{1/2}}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{-(\alpha \sin \omega t + \alpha \omega t \cos \omega t) \hat{i} + (\alpha \cos \omega t - \alpha \omega t \sin \omega t) \hat{j}}{\alpha (1 + \omega^2 t^2)^{1/2}}$$

$$\hat{e}_3 = \hat{k}$$

$$b) \quad \text{Nota que } \frac{d\hat{e}_1}{dt} = A\hat{e}_1 + B\hat{e}_2, \text{ mas } \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_1 = 1, \text{ assim}$$

$A = 0$ . Calculando  $B$ :

$$B = \hat{e}_2 \cdot \frac{d\hat{e}_1}{dt} = \frac{(-\alpha \sin \omega t - \alpha \omega t \cos \omega t) \hat{i} + (\alpha \cos \omega t - \alpha \omega t \sin \omega t) \hat{j}}{\alpha^2 (1 + \omega^2 t^2)}$$

$$\cdot (-2\alpha \omega \sin \omega t - \alpha \omega^2 t \cos \omega t) \hat{i} + (2\alpha \omega \cos \omega t - \alpha \omega^2 t \sin \omega t) \hat{j}$$

$$= \frac{2\alpha^2 \omega + \alpha^2 \omega^3 t^2}{\alpha^2 (1 + \omega^2 t^2)} = \omega \cdot \left( \frac{2 + \omega^2 t^2}{1 + \omega^2 t^2} \right)$$

$$\text{e, como } \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0, \quad \frac{d\hat{e}_2}{dt} = -B\hat{e}_1.$$

A 2ª Lei:

$$\left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{\text{fijo}} = \frac{d^2}{dt^2} (x^i \hat{e}_i) = \left( \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) \hat{e}_i + 2 \frac{dx^i}{dt} \frac{d\hat{e}_i}{dt} + x^i \frac{d^2 \hat{e}_i}{dt^2}$$

$$= \left( \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right)_{\text{girante}} + 2B \left( \frac{dx^1}{dt} \hat{e}_2 - \frac{dx^2}{dt} \hat{e}_1 \right) +$$

$$\underbrace{-B^2 (x^1 \hat{e}_1 + x^2 \hat{e}_2)}_{\text{Centrípeta}} + \underbrace{\dot{B} (x^1 \hat{e}_2 - x^2 \hat{e}_1)}_{\text{Euler}}$$

## Problema 2

a) O aro é parametrizado por  $x = R \cos \phi$ ,  $y = R \sin \phi$  ( $z = 0$ ). Calculando:

$$I_{xx} = \int_0^{2\pi} R d\phi \frac{M}{2\pi R} (R^2 - R^2 \cos^2 \phi) = \frac{MR^2}{2} = I_{yy} = I_{\perp}$$

e  $I_{ij} = 0$ ;  $i \neq j$ . Finalmente  $I_{zz} = MR^2 = I_3$

b)  $\hat{e}_1 = \hat{i}$ ;  $\hat{e}_2 = \hat{j}$ ;  $\hat{e}_3 = \hat{k}$  (o tensor de inércia é diagonal, e  $I_{xx} = I_{yy}$ . Assim, qualquer eixo no plano  $\hat{i}, \hat{j}$  é principal)

c) temos  $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{fixo}} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{girante}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = 0$ . Decompondo

nos eixos principais:

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 = 0$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 = 0$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 = 0$$

Donde vemos que a frequência de precessão ao redor do eixo  $\hat{e}_3$  é  $\Omega = \frac{I_3 - I_2}{I_2} \omega_3 = \omega_3$ .

essa precessão é estável. A precessão ao redor dos eixos  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  é instável.

### Problema 3

a) Aplicando o teorema:

$$I_{xx} = \frac{MR^2}{2} ; I_{yy} = \frac{3MR^2}{2} ; I_{zz} = 2MR^2$$

b) A Lagrangeana será:

$$L = \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2}{2} - MgR \cos \theta$$

$$= \frac{MR^2}{4} \left[ (\dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi)^2 + 3(\dot{\theta} \sin \phi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi)^2 + 4(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi})^2 \right] - MgR \cos \theta$$

e as quantidades conservadas diretas são:

$$E = \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2}{2} + MgR \cos \theta$$

$$e \quad P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \frac{MR^2}{4} \left[ \omega_1 \sin \theta \sin \phi - 3\omega_2 \sin \theta \cos \phi + 4\omega_3 \cos \theta \right]$$

note que, como o aro não é um pião simétrico,  $P_\phi$  não é conservado.