Problema 1.

$$x(t) = \alpha t \cos\omega t \qquad y(t) = \alpha t \,\text{sen}\,\omega t \qquad z(t) = z_0$$

a) $$\hat{e}_1 = \frac{(\alpha\cos\omega t - \alpha\omega t\,\text{sen}\,\omega t)\,\hat{\imath} + (\alpha\,\text{sen}\,\omega t + \alpha\omega t\cos\omega t)\,\hat{\jmath}}{\alpha(1+\omega^2t^2)^{1/2}}$$

$$\hat{e}_2 = \frac{-(\alpha\,\text{sen}\,\omega t + \alpha\omega t\cos\omega t)\,\hat{\imath} + (\alpha\cos\omega t - \alpha\omega t\,\text{sen}\,\omega t)\,\hat{\jmath}}{\alpha(1+\omega^2t^2)^{1/2}}$$

$$\hat{e}_3 = \hat{k}$$

b) Note que $\dfrac{d\hat{e}_1}{dt} = A\hat{e}_1 + B\hat{e}_2$, mas $\hat{e}_1\cdot\hat{e}_1 = 1$, assim

$A = 0$. Calculando B:

$$B = \hat{e}_2\cdot\frac{d\hat{e}_1}{dt} = \frac{(-\alpha\,\text{sen}\,\omega t - \alpha\omega t\cos\omega t)\,\hat{\imath} + (\alpha\cos\omega t - \alpha\omega t\,\text{sen}\,\omega t)\,\hat{\jmath}}{\alpha^2(1+\omega^2t^2)}$$

$$\cdot\,(-2\alpha\omega\,\text{sen}\,\omega t - \alpha\omega^2 t\cos\omega t)\,\hat{\imath} + (2\alpha\omega\cos\omega t - \alpha\omega^2 t\,\text{sen}\,\omega t)\,\hat{\jmath}$$

$$= \frac{2\alpha^2\omega + \alpha^2\omega^3t^2}{\alpha^2(1+\omega^2t^2)} = \omega\left(\frac{2+\omega^2t^2}{1+\omega^2t^2}\right)$$

e, como $\hat{e}_1\cdot\hat{e}_2 = 0$, $\dfrac{d\hat{e}_2}{dt} = -B\hat{e}_1$.

A 2ª Lei:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{\text{fixo}} = \frac{d^2}{dt^2}(x^i\hat{e}_i) = \left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\right)\hat{e}_i + 2\frac{dx^i}{dt}\frac{d\hat{e}_i}{dt} + x^i\frac{d^2\hat{e}_i}{dt^2}$$

$$= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{\text{girante}} + \underbrace{2B\left(\frac{dx^1}{dt}\hat{e}_2 - \frac{dx^2}{dt}\hat{e}_1\right)}_{\text{Coriolis}} +$$

$$\underbrace{-B^2(x^1\hat{e}_1 + x^2\hat{e}_2)}_{\text{Centrípeta}} + \underbrace{\dot{B}(x^1\hat{e}_2 - x^2\hat{e}_1)}_{\text{Euler}}$$

Problema 2

a) O aro é parametrizado por $x = R\cos\phi$, $y = R\,\text{sen}\,\phi$ $(z=0)$. Calculando:

$$I_{xx} = \int_0^{2\pi} R\,d\phi\, \frac{M}{2\pi R}\left(R^2 - R^2\cos^2\phi\right) = \frac{MR^2}{2} = I_{yy} = I_1$$

e $I_{ij} = 0$; $i \neq j$. Finalmente $I_{zz} = MR^2 = I_3$

b) $\hat{e}_1 = \hat{\imath}$; $\hat{e}_2 = \hat{\jmath}$; $\hat{e}_3 = \hat{k}$ (o tensor de inércia é diagonal, e $I_{xx} = I_{yy}$. Assim, qualquer eixo no plano $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ é principal)

c) temos $\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{fixo} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{girante} + \vec{\omega} \times \vec{L} = 0$. Decompondo nos eixos principais:

$$I_1\dot{\omega}_1 + (I_2 - I_3)\,\omega_2\omega_3 = 0$$
$$I_2\dot{\omega}_2 + (I_3 - I_1)\,\omega_1\omega_3 = 0$$
$$I_3\dot{\omega}_3 + (I_1 - I_2)\,\omega_1\omega_2 = 0$$

Donde vemos que a frequência de precessão ao redor do eixo $\hat{e}_3$ é $\Omega = \frac{I_3 - I_2}{I_2}\,\omega_3 = \omega_3$.

essa precessão é <u>estável</u>. A precessão ao redor dos eixos $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$ é <u>instável</u>.

Problema 3

a) Aplicando o teorema:

$$I_{xx} = \frac{MR^2}{2} \; ; \; I_{yy} = \frac{3MR^2}{2} \; ; \; I_{zz} = 2MR^2$$

b) A lagrangeana será:

$$L = \frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2}{2} - MgR\cos\theta$$

$$= \frac{MR^2}{4}\Big[(\dot\theta\cos\phi + \dot\psi \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)^2 + 3(\dot\theta \operatorname{sen}\phi - \dot\psi \operatorname{sen}\theta\cos\phi)^2$$
$$+ 4(\dot\psi\cos\theta + \dot\phi)^2\Big] - MgR\cos\theta$$

e as quantidades conservadas diretas são:

$$E = \frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2}{2} + MgR\cos\theta$$

e

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \frac{MR^2}{4}\left[\omega_1 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi - 3\omega_2 \operatorname{sen}\theta\cos\phi + 4\omega_3\cos\theta\right]$$

note que, como o aro não é um pião simétrico, p_ϕ não é conservado.