

Gabarito - 2º E.E.

Mecânica Clássica I

Problema 1: Podemos tratar do vínculo com multiplicadores de Lagrange:

$$L = \int ds \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} + \lambda (x^2 + y^2 - z^2 - R^2) \right)$$

cujas equações de Euler-Lagrange são:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = 2\lambda x \quad ; \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = 2\lambda y \quad ; \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \right) = -2\lambda z \quad ; \quad x^2 + y^2 - z^2 = R^2$$

donde se nota, escolhendo uma parametrização s tal que $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = 1$, a analogia com a 2ª lei de Newton nos diz que a força de vínculo, e assim a aceleração, aponta para $(2\lambda x, 2\lambda y, -2\lambda z)$. Agora, se o movimento se processa em um plano, $\vec{r} = (x, y, z)$, $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ e $\ddot{\vec{r}} = 2\lambda(x, y, -z)$ são coplanares, e existe um vetor \vec{A} independente de s tal que $\vec{A} \times \vec{r} = \vec{A} \times \dot{\vec{r}} = \vec{A} \times \ddot{\vec{r}} = 0$. Isto implica que $\vec{A} \times (\ddot{\vec{r}} - 2\lambda \vec{r}) = 0$, ou seja $-4\lambda z \vec{A} \times \hat{z} = 0$, que por sua vez nos leva a três alternativas impossíveis:

- $\lambda = 0$, e não há força de vínculo. Isto não pode ser verdade pois $x^2 + y^2 - z^2 = R^2$ não é plano.
- $z = 0$, e a geodésica é o círculo unitário.
- $\vec{A} = A_0 \hat{z}$. Isto implica que $x = y = 0$, o que é impossível.

Assim, concluímos que as geodésicas da superfície não são obtidas a partir da sua interseção com um plano que passa pela origem.

Problema 2: a) Ao girar, a parábola vai preencher o parabolóide $x^2 + y^2 = \rho^2 = az$. Com o elemento de linha dado e incluindo o potencial gravitacional, podemos escrever a Lagrangeana:

$$L = \frac{M}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz = \frac{M}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \omega^2 + \frac{4}{a^2} \rho^2 \dot{\rho}^2) - Mg \frac{\rho^2}{a}$$

b) Usando Euler-Lagrange, temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = M \frac{d}{dt} \left[\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^2} \right) \dot{\rho} \right] = M \rho \omega^2 + \frac{4M}{a^2} \rho \dot{\rho}^2 - \frac{2Mg}{a} \rho$$

c) Fazendo $\dot{\rho} = 0$ acima, temos que o equilíbrio só é possível para $\omega^2 = \frac{2g}{a}$.

Problema 3: a) O problema de potencial central tem a Lagrangeana e equações de movimento:

$$L = \frac{M}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - U(r); \quad M\ddot{r} = M r \dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr} \quad \& \quad M r^2 \dot{\theta} = l = \text{constante.}$$

Usando a conservação do momento angular, podemos escrever a equação da órbita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \frac{l}{Mr^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{l}{M} \frac{du}{d\theta}, \quad \text{onde } u = \frac{1}{r}. \quad \text{Assim: } M\ddot{r} = M \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = -\frac{l}{r^2} \cdot \frac{l}{M} \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

Então: $-\frac{l^2}{Mr^2} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{l^2}{Mr^3} - \frac{dU}{dr}$, ou seja: $\frac{d^2 u}{d\theta^2} = -u + \frac{Mr^2}{l^2} \frac{dU}{dr} \Big|_{r=\frac{1}{u}}$

b) Como sabemos $r(\theta)$, podemos usar a equação da órbita para encontrar o potencial:

$$\frac{Mr^2}{l^2} \frac{dU}{dr} \Big|_{r=\frac{1}{u}} = \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{r_0} (k^2 + 1) e^{-k\theta} = \frac{k^2 + 1}{r}$$

Integrando, encontramos um potencial proporcional ao inverso do quadrado da distância:

$$U = -\frac{l^2(k^2 + 1)}{2Mr^2} = \frac{\beta}{r^2}$$

c) A órbita circular requer $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ nas equações de movimento. Assim temos:

$$k = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{l^2}{2M}$$

note que, nesse caso, o raio está indeterminado.