Gabarito - 2º E.E.
Mecânica Clássica 1

Problema 1: Podemos tratar do vínculo com multiplicadores de Lagrange:

$$L = \int ds\left(\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2} + \lambda(x^2+y^2-z^2-R^2)\right)$$

cujas equações de Euler-Lagrange são:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = 2\lambda x \;;\; \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = 2\lambda y \;;\; \frac{d}{ds}\left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) = -2\lambda z \;;\; x^2+y^2-z^2=R^2$$

donde se nota, escolhendo uma parametrização s tal que $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=1$, a analogia com a 2ª lei de Newton nos diz que a força de vínculo, e assim a aceleração, aponta para $(2\lambda x, 2\lambda y, -2\lambda z)$. Agora, se o movimento se processa em um plano, $\vec{r}=(x,y,z)$, $\dot{\vec{r}}=(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$ e $\ddot{\vec{r}}=2\lambda(x,y,-z)$ são coplanares, e existe um vetor $\vec{A}$ independente de s tal que $\vec{A}\times\vec{r}=\vec{A}\times\dot{\vec{r}}=\vec{A}\times\ddot{\vec{r}}=0$. Isto implica que $\vec{A}\times(\ddot{\vec{r}}-2\lambda\vec{r})=0$, ou seja $-4\lambda z\,\vec{A}\times\hat{z}=0$, que por sua vez nos leva a três alternativas impossíveis:

i) $\lambda=0$, e não há força de vínculo. Isto não pode ser verdade pois $x^2+y^2-z^2=R^2$ não é plano.

ii) $z=0$, e a geodésica é o círculo unitário.

iii) $A=A_0\hat{z}$. Isto implica que $x=y=0$, o que é impossível.

Assim, concluímos que as geodésicas da superfície não são obtidas a partir da sua interseção com um plano que passa pela origem.

Problema 2: a) Ao girar, a parábola vai preencher o parabolóide $x^2+y^2=\rho^2=az$. Com o elemento de linha dado e incluindo o potencial gravitacional, podemos escrever a lagrangeana:

$$L = \frac{M}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2) - Mgz = \frac{M}{2}\left(\dot{\rho}^2+\rho^2\omega^2+\frac{4}{a^2}\rho^2\dot{\rho}^2\right) - Mg\frac{\rho^2}{a}$$

b) Usando Euler-Lagrange, temos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\rho}}\right) = M\frac{d}{dt}\left[\left(1+\frac{4\rho^2}{a^2}\right)\dot{\rho}\right] = M\rho\omega^2 + \frac{4M}{a^2}\rho\dot{\rho}^2 - \frac{2Mg}{a}\rho$$

c) Fazendo $\dot{\rho}=0$ acima, temos que o equilíbrio só é possível para $\omega^2=\frac{2g}{a}$.

Problema 3: a) O problema de potencial central tem a Lagrangeana e equações de movimento:

$$L = \frac{M}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \;;\quad M\ddot{r} = Mr\dot{\theta}^2 - \frac{dU}{dr} \quad \& \quad Mr^2\dot{\theta} = \ell = \text{constante}.$$

Usando a conservação do momento angular, podemos escrever a equação da órbita:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{d\theta} = \frac{\ell}{Mr^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{\ell}{M}\frac{du}{d\theta}, \text{ onde } u=\frac{1}{r}. \quad \text{Assim: } M\ddot{r} = M\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{\ell}{r^2}\cdot\frac{\ell}{M}\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

Então:

$$-\frac{\ell^2}{Mr^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{\ell^2}{Mr^3} - \frac{dU}{dr}, \text{ ou seja: } \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{Mr^2}{\ell^2}\frac{dU}{dr}\bigg|_{r=\frac{1}{u}}$$

b) Como sabemos $r(\theta)$, podemos usar a equação da órbita para encontrar o potencial:

$$\frac{Mr^2}{l^2}\frac{dU}{dr}\bigg|_{r=\frac{1}{u}} = \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{r_0}(\alpha^2+1)e^{-\alpha\theta} = \frac{\alpha^2+1}{r}$$

Integrando, encontramos um potencial proporcional ao inverso do quadrado da distância:

$$U = -\frac{l^2(\alpha^2+1)}{2Mr^2} = \frac{\beta}{r^2}$$

c) A órbita circular requer $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ nas equações de movimento. Assim temos:

$$\alpha = 0 \implies \beta = -\frac{l^2}{2M}$$

note que, nesse caso, o raio está indeterminado.