

# Gabarito - 1º E.E.

## Mecânica Clássica I

Problema 1: A velocidade e a aceleração são obtidas através da diferenciação em relação ao tempo:

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = a\omega(1 - \cos\omega t)\hat{i} + a\omega\sin\omega t\hat{j}$$

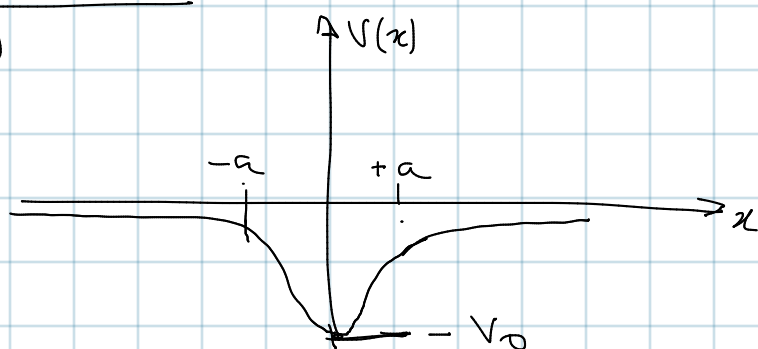
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}} = a\omega^2\sin\omega t\hat{i} + a\omega^2\cos\omega t\hat{j}$$

b)  $E = \frac{v^2}{2} = \frac{a^2\omega^2}{2} [(1 - \cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t] = \frac{a^2\omega^2}{2} 2(1 - \cos\omega t) = a^2\omega^2(1 - \cos\omega t)$

c) Inspeccionando a expressão para  $\vec{x}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ , vemos que  $E = a\omega^2 y$ . O sistema pode assim representar um corpo caindo por uma calha sem atrito sob efeito de uma força gravitacional constante com aceleração  $a\omega^2$ .

Problema 2:

a)



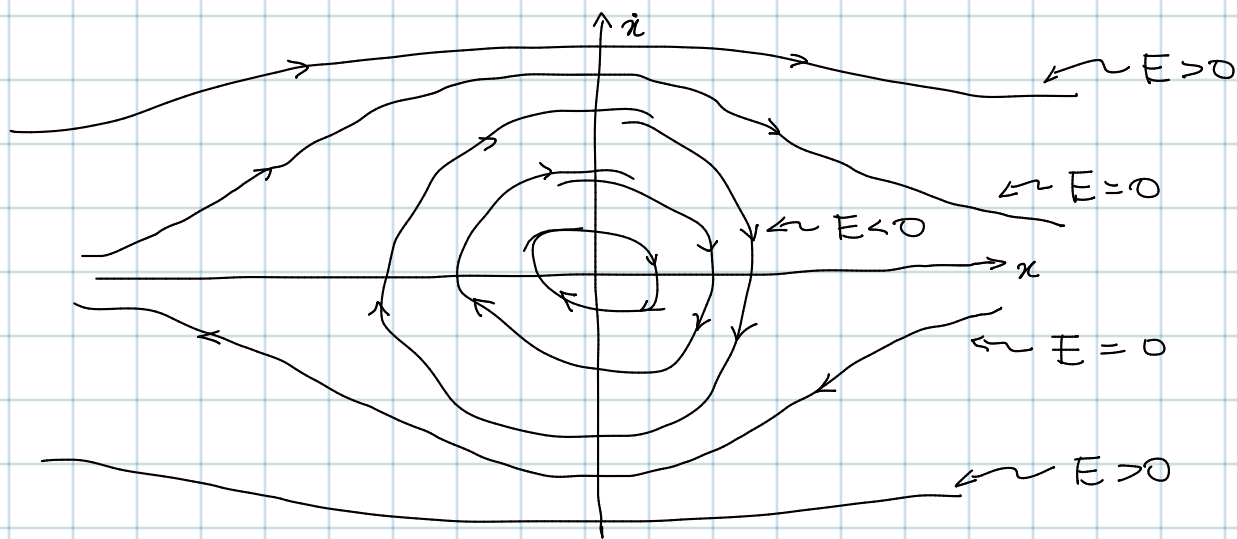
- função par

- Decaimento exponencial p/ 0.

- Se  $E < 0$ , trajetórias confinadas, se  $E > 0$ , partícula "escapa" p/  $|x| = \infty$ .

b) Soluções com  $E < 0$  são órbitas fechadas no espaço de fase.

Soluções com  $E \geq 0$  são abertas.



c) Usando conservação de energia, temos

$$\frac{M\dot{x}^2}{2} - \frac{V_0}{\cosh^2 \frac{x}{a}} = E \Rightarrow \dot{x} = \pm \left( \frac{2E}{M} + \frac{2V_0}{M \cosh^2 \frac{x}{a}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

resolvendo para  $x$  e integrando

$$\int_{x_0}^x \left( \frac{2E}{M} + \frac{2V_0}{M \cosh^2 \frac{x'}{a}} \right)^{-\frac{1}{2}} dx' = \Delta t$$

e o período é dado por:

$$T = 4 \int_0^{x_m} \left( \frac{2E}{M} + \frac{2V_0}{M \cosh^2 \frac{x}{a}} \right)^{-\frac{1}{2}} dx, \text{ onde } x_m \text{ é tal que } \cosh \frac{x_m}{a} = \left( -\frac{V_0}{E} \right)^{\frac{1}{2}}$$

### Problema 3:

a) Por substituição. Podemos substituir o lado direito por  $f e^{i\omega t}$ , pois a equação é linear:

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)A e^{i\omega t} = f e^{i\omega t}$$

Assim

$$A = \frac{f}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\beta\omega}$$

cujo módulo é  $|A| = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$

a condição de sobre e subamortecimento depende da equação possuir ou não soluções oscilatórias.

Supondo uma solução da equação homogênea da forma  $e^{rt}$ :

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

que terá parte imaginária desde que  $\beta < \omega_0$ . A expressão para a solução particular, contudo, é a mesma para ambos os casos.

b) O máximo de  $|A|$  é obtido para o mínimo do denominador. Derivando e radicando:

$$4\omega_R(\omega_R^2 - \omega_0^2) + 8\beta^2\omega_R = 0$$

ou seja, o máximo acontece para  $\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ . Note que, se  $\omega < \sqrt{2}\beta$ , o que inclui o caso sobreamortecido, não há máximo:  $|A|$  é uma função monotonicamente decrescente em  $\omega$ .