Gabarito - 1º E.E.

Mecânica Clássica 1

Problema 1: A velocidade e a aceleração são obtidas através da diferenciação em relação ao tempo:

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = a\omega(1-\cos\omega t)\,\hat{\imath} + a\omega\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{\jmath}$$

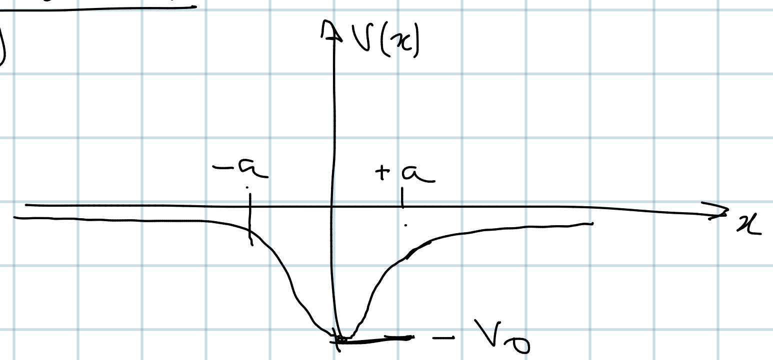
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}} = a\omega^2\text{sen}\,\omega t\,\hat{\imath} + a\omega^2\cos\omega t\,\hat{\jmath}$$

b) $\epsilon = \frac{v^2}{2} = \frac{a^2\omega^2}{2}\left[(1-\cos\omega t)^2 + \text{sen}^2\omega t\right] = \frac{a^2\omega^2}{2}2(1-\cos\omega t) = a^2\omega^2(1-\cos\omega t)$

c) Inspecionando a expressão para $\vec{x}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$, vemos que $\epsilon = a\omega^2 y$. O sistema pode assim representar um corpo caindo por uma calha sem atrito sob efeito de uma força gravitacional constante com aceleração $a\omega^2$.

Problema 2:

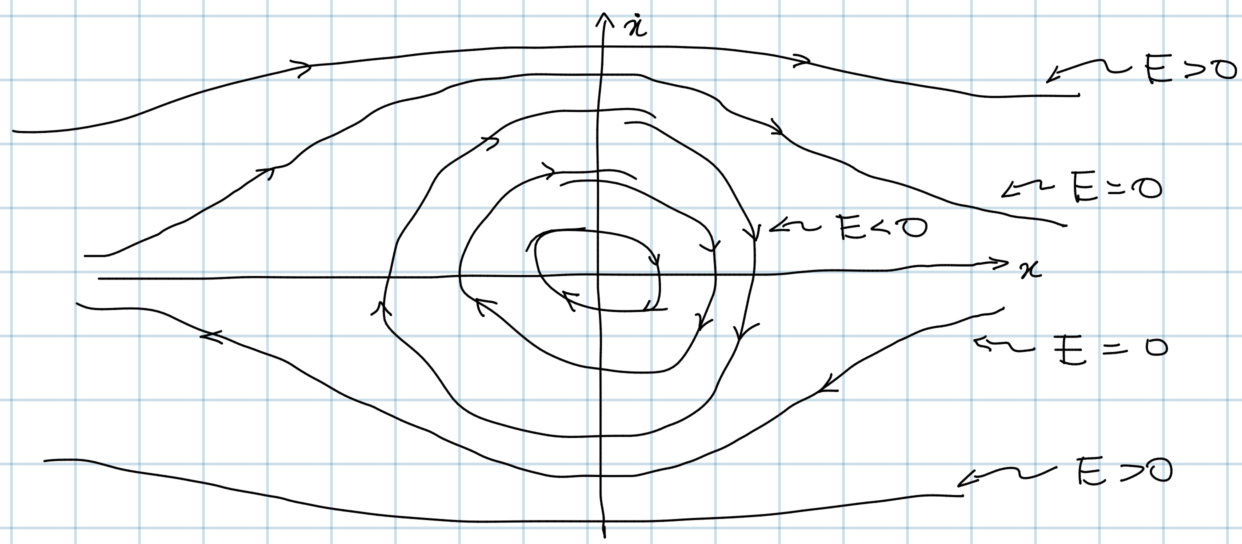
a)



- função par
- Decaimento exponencial p/ 0.
- Se $E<0$, trajetórias confinadas, se $E>0$, partícula "escapa" p/ $|x| = \infty$.

b) Soluções com $E<0$ são órbitas fechadas no espaço de fase.

Soluções com $E \geq 0$ são abertas.



c) Usando conservação de energia, temos

$$\frac{M\dot{x}^2}{2} - \frac{V_0}{\cosh^2\frac{x}{a}} = E \Rightarrow \dot{x} = \pm\left(\frac{2E}{M} + \frac{2V_0}{M\cosh^2\frac{x}{a}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

resolvendo para $\dot{x}$ e integrando

$$\int_{x_0}^{x}\left(\frac{2E}{M} + \frac{2V_0}{M\cosh^2\frac{x'}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx' = \Delta t$$

e o período é dado por:

$$T = 4\int_0^{x_M}\left(\frac{2E}{M} + \frac{2V_0}{M\cosh^2\frac{x}{a}}\right)^{-\frac{1}{2}}dx\,,\quad \text{onde } x_M \text{ é tal que } \cosh\frac{x_M}{a} = \left(-\frac{V_0}{E}\right)^{1/2}.$$

Problema 3:

a) Por substituição. Podemos substituir o lado direito por $fe^{i\omega t}$, pois a equação é linear:

$$(-\omega^2 + 2i\beta\omega + \omega_0^2)Ae^{i\omega t} = f e^{i\omega t}$$

Assim

$$A = \frac{f}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\beta\omega}$$

cujo módulo é
$$|A| = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

a condição de sobre e subamortecimento depende da equação possuir ou não soluções oscilatórias. Supondo uma solução da equação homogênea da forma e^{rt}:

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0 \implies r = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

que terá parte imaginária desde que $\beta < \omega_0$. A expressão para a solução particular, contudo, é a mesma para ambos os casos.

b) O máximo de $|A|$ é obtido para o mínimo do denominador. Derivando o radiciando:

$$4\omega_R(\omega_R^2 - \omega_0^2) + 8\beta^2\omega_R = 0$$

ou seja, o máximo acontece para $\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. Note que, se $\omega < \sqrt{2}\beta$, o que inclui o caso sobreamortecido, não há máximo: $|A|$ é uma função monotonicamente decrescente em ω.