

Gabarito 1º E.E. Mecânica LT

Problema 1

a) usando o formulário, temos:

$$\nabla \times \vec{F} = 0\hat{i} - 2z\hat{j} - 3x\hat{k} \neq 0$$

assim, \vec{F} não pode ser o gradiente de nenhuma função e é não-conservativo.

a afirmação é falsa.

b) Intuitivamente, $\vec{A} \times \vec{X}$ nos dá as componentes de \vec{A} normais a \vec{X} e $\vec{A} \cdot \vec{X}$ a componente paralela.

Especificamente: chame $\vec{B} = \vec{A} \times \vec{X}$. Então $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{X}) = (\vec{A} \cdot \vec{X})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{A})\vec{X}$. Isolando \vec{A} e lembrando que $\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2 = A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{|\vec{X}|^2} [(\vec{A} \cdot \vec{X})^2 + (\vec{A} \times \vec{X})^2]$, temos a resposta.

A afirmação é assim verdadeira.

c) Nas vizinhanças da terra, a aceleração gravitacional é constante. No sentido de movimento, temos assim um movimento uniformemente acelerado, com deslocamento proporcional ao quadrado do tempo.

A afirmação é assim falsa.

d) Suponha que entre dois corpos exista uma força conservativa com potencial $U(\vec{r}_a, \vec{r}_b)$. Pela 3ª Lei temos que a força que b exerce em a $\vec{F}_a = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_a} U(\vec{r}_a, \vec{r}_b)$ é igual em módulo e direção e oposta em sentido à força que a exerce em b: $\vec{F}_b = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_b} U(\vec{r}_a, \vec{r}_b)$. Assim temos $(\vec{\nabla}_{\vec{r}_a} + \vec{\nabla}_{\vec{r}_b}) U(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = 0$ e U é função apenas da posição relativa dos dois corpos: $U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$. A interação é assim invariante por translações.

A afirmação é assim verdadeira.

e) Do corpo, só percebemos a existência das forças - ao menos em mecânica newtoniana - via seus efeitos.

Desta forma, se a aceleração for o único efeito da força - como o é em mecânica newtoniana, não podemos medir independentemente a aceleração da força.

A afirmação é assim falsa.

Problema 2

A velocidade para atravessar a piscina é $v_b = 2 \text{ m/s}$ no caso de braços, e $v_p = 1,25 \text{ m/s}$ no caso de pernas. Assumindo que essas são as velocidades terminais, e que as constantes são as mesmas em cada caso, as forças exercitadas pelos braços e pernas se somam. Assim:

a) no caso laminar, a força exercitada pelos braços e pernas são $F_b = K v_b$ e $F_p = K v_p$, respectivamente.

A força total $F = F_b + F_p = K v$, proporcional à velocidade terminal, que será então $v = 3,25 \text{ m/s}$.

b) No caso turbulento, $F_b = C v_b^2$ e $F_p = C v_p^2$. Somando as duas, a velocidade terminal será $v^2 = v_p^2 + v_b^2$ ou seja: $v \cong 2,36 \text{ m/s}$

c) Para 22s, a velocidade média é de $2,27 \text{ m/s}$, já bem dentro do regime turbulento.

Problema 3

a) Substituindo, temos: $\ddot{x} = e^{-\beta t}(-\beta \dot{y} + \ddot{y})$ e $\ddot{x} = e^{-\beta t}(\beta^2 y - 2\beta \dot{y} + \ddot{y})$, e assim, a equação para $y(t)$ será:

$$\ddot{y} + (\omega_0^2 - \beta^2)y = 0, \text{ ou seja, a solução geral é } y(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \text{ com } \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$$

Agora, supondo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$, temos $A = x_0$ e $B = \frac{1}{\omega} (v_0 + \beta x_0)$, e assim:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left(x_0 \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} (v_0 + \beta x_0) \sin(\omega t) \right), \text{ com } \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2.$$

b) Para $v_0 = 0$ as expressões para posição e a velocidade são simplificadas definindo

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\beta^2}{\omega^2} x_0^2} = x_0 \frac{\omega_0}{\omega}, \text{ e } \cos \phi = \frac{x_0}{A}, \text{ sen } \phi = \frac{\beta}{\omega} \frac{x_0}{A}.$$

e neste caso as expressões para a posição e velocidade serão:

$$x(t) = x_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\beta t} \cos(\omega t - \phi); \quad \dot{x}(t) = -x_0 \frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\beta t} \sin(\omega t)$$

E a variação de energia:

$$E(t) = \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \omega_0^2 x^2) = \frac{M}{2} x_0^2 e^{-2\beta t} \left(2 \frac{\beta}{\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \omega_0^2 + 2\beta \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin^2(\omega t) \right)$$

$= K e^{-2\beta t} (A - B \cos(2\omega t + \phi))$, para efeitos de esboço de gráfico. A e B são constantes positivas.

