Gabarito 1º E.E. Mecânica L1

Problema 1

a) usando o formulário, temos:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0\hat{\imath} - 2z\hat{\jmath} - 3x\hat{k} \neq 0$$

assim, $\vec{F}$ não pode ser o gradiente de nenhuma função e é não-conservativo.

a afirmação é falsa

b) Intuitivamente, $\vec{A}\times\vec{X}$ nos dá as componentes de $\vec{A}$ normais a $\vec{X}$ e $\vec{A}\cdot\vec{X}$ a componente paralela.
Especificamente: chame $\vec{B} = \vec{A}\times\vec{X}$. Então $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{X}) = (\vec{A}\cdot\vec{X})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{A})\vec{X}$. Isolando $\vec{A}$ e lembrando que $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2 = A^2\cos^2\theta + A^2\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{|\vec{X}|^2}[(\vec{A}\cdot\vec{X})^2 + (\vec{A}\times\vec{X})^2]$, temos a resposta.

A afirmação é assim verdadeira.

c) Nas vizinhanças da terra, a aceleração gravitacional é constante. No sentido do movimento, temos assim um movimento uniformemente acelerado, com deslocamento proporcional ao quadrado do tempo.

A afirmação é assim falsa.

d) Suponha que entre dois corpos exista uma força conservativa com potencial $U(\vec{r}_a, \vec{r}_b)$. Pela 3ª lei temos que a força que b exerce em a $\vec{F}_a = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_a} U(\vec{r}_a,\vec{r}_b)$ é igual em módulo e direção e oposta em sentido à força que a exerce em b: $\vec{F}_b = -\vec{\nabla}_{\vec{r}_b} U(\vec{r}_a,\vec{r}_b)$. Assim temos $(\vec{\nabla}_{\vec{r}_a} + \vec{\nabla}_{\vec{r}_b})U(\vec{r}_a,\vec{r}_b) = 0$ e U é função apenas da posição relativa dos dois corpos: $U(\vec{r}_a - \vec{r}_b)$. A interação é assim invariante por translações.

A afirmação é assim verdadeira

e) Do corpo, só percebemos a existência das forças — ao menos em mecânica newtoniana — via seus efeitos.
Desta forma, se a aceleração for o único efeito da força — como o é em mecânica newtoniana, não podemos medir independentemente a aceleração da força.

A afirmação é assim falsa.

Problema 2

A velocidade para atravessar a piscina é $v_b = 2\,m/s$ no caso de braços, e $v_p = 1{,}25\,m/s$ no caso de pernas. Assumindo que essas são as velocidades terminais, e que as constantes são as mesmas em cada caso, as forças executadas pelos braços e pernas se somam. Assim:

a) no caso laminar, a força executada pelos braços e pernas são $F_b = Kv_b$ e $F_p = Kv_p$, respectivamente.
A força total $F = F_b + F_p = Kv$, proporcional à velocidade terminal, que será então $v = 3{,}25\,m/s$.

b) No caso turbulento, $F_b = Cv_b^2$ e $F_p = Cv_p^2$. Somando as duas, a velocidade terminal será $v^2 = v_p^2 + v_b^2$ ou seja: $v \cong 2{,}36\,m/s$

c) Para 22s, a velocidade média é de $2{,}27\,m/s$, já bem dentro do regime turbulento.

Problema 3

a) Substituindo, temos: $\dot{x} = e^{-\beta t}(-\beta y + \dot{y})$ e $\ddot{x} = e^{-\beta t}(\beta^2 y - 2\beta\dot{y} + \ddot{y})$, e assim, a equação para $y(t)$ será:

$$\ddot{y} + (\omega_0^2 - \beta^2)y = 0$$, ou seja, a solução geral é $y(t) = A\cos\omega t + B\operatorname{sen}\omega t$, com $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$

Agora, supondo $x(0)=x_0$ e $\dot{x}(0)=v_0$, temos $A=x_0$ e $B=\frac{1}{\omega}(v_0+\beta x_0)$, e assim:

$$x(t)=e^{-\beta t}\left(x_0\cos(\omega t)+\frac{1}{\omega}(v_0+\beta x_0)\,\text{sen}(\omega t)\right),\ \text{com}\ \omega^2=\omega_0^2-\beta^2.$$

b) Para $v_0=0$ ressões para posição e a velocidade são simplificadas definindo

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{\beta^2}{\omega^2}x_0^2}=x_0\frac{\omega_0}{\omega},\ \text{e}\ \cos\phi=\frac{x_0}{A},\ \text{sen}\,\phi=\frac{\beta}{\omega}\frac{x_0}{A}:$$

e neste caso as expressões para a posição e velocidade serão:

$$x(t)=x_0\frac{\omega_0}{\omega}e^{-\beta t}\cos(\omega t-\phi)\ ;\quad \dot{x}(t)=-x_0\frac{\omega_0^2}{\omega}e^{-\beta t}\,\text{sen}(\omega t)$$

E a variação de energia:

$$E(t)=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\omega_0^2x^2)=\frac{m}{2}x_0^2e^{-\beta t}\left(2\frac{\beta}{\omega}\cos(\omega t)\,\text{sen}(\omega t)+\omega_0^2+2\beta\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\text{sen}^2(\omega t)\right)$$

$$=Ke^{-\beta t}(A-B\cos(2\omega t+\varphi)),$$ para efeitos de esboço de gráfico. A e B são constantes positivas.