Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

FI-452 – Física Matemática 2A

1ª Lista de Exercícios - Entrega dia 06/11/2013

Problema 1: Mostre que, se $y(x)$ satisfaz uma equação algébrica

$$y^n + a_2(x)y^{n-2} + \ldots a_n(x) = 0,$$

onde os coeficientes $a_i(x)$ são polinômios em x, então $y(x)$ satisfaz uma equação diferencial linear de ordem $n-1$, cujos coeficientes são funções racionais de x.

Problema 2: Ilustre o resultado do problema acima para o caso das cônicas: i) círculos, ii) elipses, iii) parábolas e iv) hipérboles.

Problema 3: (M&W 1-1 a 1-20): Ache as soluções gerais das seguintes EDOs:

(a) $y' = a/(x+y)^2$;

(b) $2x^3y' = 1 + \sqrt{1+4x^2y}$;

(c) $x^2y'^2 - 2(xy-4)y' + y^2 = 0$ (geral **e** particular);

(d) $yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0$.

Problema 4: Usando a notação matricial, calcule a solução geral do sistema linear com coeficientes constantes

$$\frac{dy}{dx} = Ay,$$

Onde A é uma matriz 3×3, nos casos em que:

(a) A é diagonalizável.

(b) A é triangular superior.

(c) A é nilpotente.

Problema 5: Mostre que o Wronskiano de k soluções linearmente independentes de uma EDO de ordem $n > k$ não pode ter um número infinito de zeros em qualquer intervalo (a,b) em que seus coeficientes são contínuos.

Problema 6: (Sotomayor, 4-14): Seja $u(x)$ uma solução não trivial de

$$(P(x)u')' + Q(x)u = 0 \qquad (1)$$

num intervalo I. Se $0 < c_1 \leq P(x) \leq c_2$ e $k_1 \leq Q(x) \leq k_2$ prove que

(a) Se $k_2 \leq 0$ então $u(x)$ tem no máximo um zero em I.

(b) Se $k_2 > 0$ e $x_1 < x_2$ são zeros consecutivos de $u(x)$ então

$$x_2 - x_2 \geq \pi \sqrt{\frac{c_1}{k_2}}.$$

(c) Se $k_1 > 0$, em qualquer subintevalo de I de comprimento maior ou igual a $\pi\sqrt{c_2/k_1}$ existe pelo menos um zero de $u(x)$.