Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

FI-451 – Física Matemática 1A

1º Exercício Escolar – 19/06/2013

ATENÇÃO: A prova é composta por 4 questões com pesos iguais. Crédito parcial será dado conforme a demonstração do conhecimento do assunto. O tempo de prova é de 2:00 (duas horas).

Esta prova contém uma página.

Problema 1: Considere um sistema de coordenadas parabólico em $\mathbb{R}^2$, $\{q^1, q^2\}$:

$$x = q^1 q^2, \qquad y = \frac{1}{2}((q^1)^2 - (q^2)^2)$$

(a) Calcule o elemento de linha $ds^2 = dx^2 + dy^2$ em termos de q^1 e q^2.

(b) Use o resultado do problema anterior e calcule os operadores tensoriais métrica g em termos de $dq^i \otimes dq^j$. Calcule sua inversa g^{-1} em termos de $\partial_{q^i} \otimes \partial_{q^j}$, etc.

(c) Calcule o gradiente (vetor associado a df) e o divergente (${}^*(d^*\alpha)$) nesse sistema de coordenadas.

Problema 2: Considere o elemento de linha em coordenadas bi-esféricas em $\mathbb{R}^3$ ($\{q^1 = \tau, q^2 = \sigma, q^3 = \phi\}$).

$$ds^2 = \frac{d\tau^2 + d\sigma^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \sigma \, d\phi^2}{(cosh\tau - \cos\sigma)^2}$$

(a) Escreva a metrica e a métrica inversa associadas e uma base ortonormal de vetores e 1-formas em termos dos gradientes dq^i e dos vetores ∂_{q^i}.

(b) Use o resultado do item anterior para relacionar, via a métrica, os gradientes dq^i com vetores e os vetores ∂_{q^i} com 1-formas.

(c) Calcule o rotacional de um campo vetorial $\mathbf{A}$ neste sistema de coordenadas.

Problema 3: Mostre que a função exponencial de matrizes

$$\exp A = \mathbb{I} + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots$$

Satisfaz

$$\exp(OAO^{-1}) = O \exp(A) O^{-1}, \tag{1}$$

e calcule a exponencial da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Problema 4: Considere o espaço vetorial das matrizes 2x2. Defina a forma bilinear dada pelo traço (a soma dos elementos da diagonal)

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB) \equiv \sum_i (AB)_{ii} \tag{3}$$

e mostre que ela é simétrica e não-degenerada. Ela é positiva definida? Prove ou mostre um contra-exemplo.