Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

FI451 – Física Matemática 1A

4ª Lista de Exercícios – Entrega dia 19/08/2013

Problema 1: Mostre que a delta de Dirac satisfaz:

$$\delta(x^2-a^2) = (\delta(x-a)+\delta(x+a))/2a, \qquad \int \delta(a-x)dx\delta(x-b) = \delta(a-b). \tag{1}$$

Problema 2: Seja $\phi(x)$ uma função quadrado integrável complexa no intervalo $[0,2\pi]$. Determine para quais valores de $\phi(0)$ e $\phi(2\pi)$ o operador laplaciano d^2/dx^2 é auto-adjunto.

Problema 3: Mostre a identidade de Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx|f(x)|^2 \tag{2}$$

onde c_n são os coeficientes de Fourier de $f(x)$:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx f(x)e^{inx}$$

Problema 4: Seja T um operador linear limitado e z um número complexo. Sob quais condições $1/(T-z)$ é bem definido? Dê uma expressão polinomial para este último operador. Quando bem definido, ele é limitado ou compacto?

Problema 5: Calcule a transformada de Fourier da função

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_0 t} & \text{se } |t| < T, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3}$$

e verifique que $\Delta\omega\Delta t \approx 4\pi$.

Problema 6: (Hassani 8.28) Mostre que a transformada de fourier de

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

é

$$\tilde{f}(k) = \sqrt{2\pi}\sum_{p=0}^{n} i^p a_p \delta^{(p)}(k), \qquad \text{onde } \delta^{(p)}(k) = \frac{d^p}{dk^p}\delta(k). \tag{4}$$