



FI451 – FÍSICA MATEMÁTICA 1A

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS – ENTREGA DIA 05/08/2013

PROBLEMA 1: Mostre que, para A uma matriz invertível:

$$\frac{\partial}{\partial A_{ij}} \det A = \det A (A^{-1})^{ji} \quad \det \exp A = \exp \operatorname{Tr} A$$

PROBLEMA 2: O teorema de Cayley-Hamilton diz que o polinômio característico $P(z)$ de uma matriz A , quando aplicado na própria matriz, resulta zero: $P(z = A) = 0$. Para matrizes 2×2 , isto significa que $A^2 - \operatorname{Tr}(A)A + \det(A) = 0$. Calcule a identidade análoga para matrizes 3×3 .

PROBLEMA 3: Considere 3 matrizes L_3, L_+ e L_- que satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[L_3, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}, \quad [L_+, L_-] = -2L_3$$

Mostre que, a partir de um autovetor unitário de L_3 com autovalor h , aniquilado por L_+ , $L_+ v_h = 0$, $\langle v_h, v_h \rangle = 1$ podemos obter um autovetor v de L_3 com $\langle v, v \rangle < 0$.

PROBLEMA 4: Considere um espaço de Hilbert de dimensão infinita, com base $\{v_i\}, i \geq 0$ e um operador P tal que

$$Pv_i = v_{i+1}.$$

Mostre que existe um operador Q tal que $QP = \mathbb{I}$, mas não existe operador R tal que $PR = \mathbb{I}$. P tem assim inversa à esquerda, mas não à direita.

PROBLEMA 5: Seja ℓ_p o espaço de funções em um intervalo $[a, b]$ satisfazendo:

$$\|f(x)\|_p = \left| \int_a^b dx |f(x)|^p \right|^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Mostre que toda sequência de Cauchy de funções em ℓ_p é convergente.

PROBLEMA 6: Considere o núcleo de Féjer:

$$K_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \left[\frac{\operatorname{sen}((N+1)x/2)}{\operatorname{sen}(x/2)} \right]^2 & \text{se } x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ N+1 & \text{se } x = 2k\pi \text{ para algum } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Mostre que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^b dx K_N(x) f(x) = f(0).$$

para qualquer função diferenciável $f(x)$, desde que o intervalo (a, b) contenha o zero.