Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

FI451 – Física Matemática 1A

2ª Lista de Exercícios – Entrega dia 18/06/2013

Problema 1: A associação entre vetores e duais não é única. Mostre que dada uma base de 1-formas de $\mathbb{R}^3$ dada por $\{dx^1,dx^2,dx^3\}$, os dois vetores

$$V^1 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad V^2 = \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha\frac{\partial}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial}{\partial x^3} \tag{1}$$

podem ser considerados duais a dx^1. Existe alguma liberdade na escolha de uma base de vetores V^i que seja dual a base de 1-formas, i. e., satisfaça $V^i(dx^j) = \delta^{ij}$? Dada uma base $\{\sum_j A^1_j dx^j, \sum_j A^2_j dx^j, \sum_j A^3_j dx^j\}$, qual é sua base dual?

Problema 2: Considere os 3 campos vetoriais em $\mathbb{R}^2$:

$$L^- = \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad L^0 = x_1\frac{\partial}{\partial x^1} + x_2\frac{\partial}{\partial x^2}, \qquad L^+ = x_1^2\frac{\partial}{\partial x^1} + x_2^2\frac{\partial}{\partial x^2}. \tag{2}$$

E defina o comutador entre dois vetores como

$$[A,B] = \sum_i A(B^i)\frac{\partial}{\partial x^i} - B(A^i)\frac{\partial}{\partial x^1}.$$

Mostre que $L^\pm,L^0$ satisfazem

$$[L^0,L^\pm] = \pm L^\pm, \qquad [L^+,L^-] = -2L^0. \tag{3}$$

Problema 3: Considere o elemento de linha

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2,$$

e a métrica associada. Esboce os dois campos vetoriais

$$V^1 = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad V^2 = \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{4}$$

Em qual região eles são ortogonais? O que acontece com eles quando $r \to \infty$?

Problema 4: Mostre que o espaço de operadores lineares de um espaço vetorial V em V pode ser visto como isomorfo a $V \otimes V^*$. [Sugestão: escreva a ação de um dado operador em uma base de V e associe a este uma combinação linear de produtos tensoriais da base e da base dual.]

Problema 5: Seja um espaço vetorial V sobre os complexos $\mathbb{C}$ com um produto interno sesquilinear $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$. Considere as transformações unitárias, definidas por

$$\langle Uv, Uw\rangle = \langle v, w\rangle \tag{5}$$

para quaisquer $v, w \in V$. Mostre que, para ϵ infinitesimal, U pode ser escrito como $U = \mathbb{I} + i\epsilon A$, onde $\mathbb{I}$ é a identidade e A é uma matriz hermitiana ($A^T = A^*$) de traço nulo. Mostre que, para tal A, e^{itA} é uma matriz ortogonal, onde a exponencial de uma matriz é definida segundo sua série de Taylor:

$$e^A = \mathbb{I} + A + \frac{1}{2}A^2 + \dots$$

<u>**Problema 6**</u>: Introduza uma base de matrizes 2×2 hermitianas e de traço nulo dado pelas Matrizes de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Verifique que $\sigma^i \sigma^j = \mathbb{I}\delta^{ij} + i\epsilon^{ijk}\sigma^k$, onde ϵ^{ijk} é o símbolo totalmente antissimétrico em 3 dimensões. Use esse resultado para calcular $e^{i\theta_1\sigma^1} e^{i\theta_3\sigma^3} e^{-i\theta_1\sigma^1}$. [Sugestão: calcule primeiro $e^{i\theta_1\sigma^1}\sigma^3 e^{-i\theta_1\sigma^1}$.]

<u>**Problema 7**</u>: Seja P um operador de projeção, isto é, que satisfaz $P^2 = P$. Mostre que, em um espaço de dimensão n, podemos escrever $P = uu^T$, onde u é uma matriz $n \times m$ satisfazendo $u^T u = \mathbb{I}$ para algum $m < n$. Use esse resultado para escrever u para o operador que projeta um vetor geral em coordenadas esféricas

$$V = V^r \frac{\partial}{\partial r} + V^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + V^\phi \frac{\partial}{\partial \phi}$$

nas suas componentes θ e ϕ.

<u>**Problema 8**</u>: Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Escreva a matriz como SO, onde S é simétrica e O ortogonal, e como $O^{-1}DO$, onde D é diagonal e O uma matriz ortogonal (não necessariamente igual à do primeiro caso)!