



FI-451 – Física Matemática 1A

1ª Lista de Exercícios - Entrega dia 05/06/2013

Problema 1: Considere as funções de $\mathbb{R}^2 : \{x_1, x_2\}$:

$$u = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{x_2}{x_1} \right), \quad v = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Calcule du e dv , e mostre onde as 1-formas são linearmente independentes. Relacione $du \wedge dv$ com a 2-forma volume $dx_1 \wedge dx_2$.

Problema 2: Considere as funções de $\mathbb{R}^3 : \{x_1, x_2, x_3\}$:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctg \left(\frac{x_2}{x_1} \right), \quad z = x_3.$$

Calcule dr , $d\theta$ e dz em termos de dx_i . Calcule a forma volume $dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ em termos de r, θ, z .

Problema 3: Seja $z \in \mathbb{C}$ um número complexo. Considere a relação de equivalência:

$$z \equiv \lambda z,$$

onde λ é um número complexo com $|\lambda| > 1$. Esta relação de equivalência associa um ponto do plano complexo a infinitos pontos. Cada conjunto de pontos associados via a relação de equivalência é chamado de *classe de equivalência*. Mostre que as classes de equivalência do plano complexo pela ação acima constituem uma variedade diferenciável construindo explicitamente um atlas.

Problema 4: No espaço do Problema 3, mostre que a função

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z}{(\lambda^{n/2} z - \lambda^{-n/2})^2}$$

é bem determinada (isto é, independe do representante da classe de equivalência), e que

$$\alpha = \frac{dz}{z}$$

é uma forma fechada mas não exata no espaço.

Problema 5: Considere as seguintes superfícies de \mathbb{R}^3 . Escolha uma parametrização apropriada $\{u, v\}$ e calcule du , dv e $du \wedge dv$ para cada uma (em todos os casos $\alpha, \beta, \gamma > 0$):

(a) $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 1.$

(b) $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 - \gamma x_3^2 = 1.$

(c) $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 - \gamma x_3^2 = 0.$

(d) $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 - \gamma x_3^2 = -1.$

Problema 6: Calcule o elemento de linha $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ para cada um dos casos do Problema 5.

Problema 7: Para um elemento de linha da forma $ds^2 = h_1^2 dx_1^2 + h_2^2 dx_2^2 + h_3^2 dx_3^2$, calcule o gradiente e o divergente e o rotacional.