

Teoria de Campo Interagente

Até agora tratamos de campos livres: suas excitações são aditivas, e o propagador em certa medida trivial: auto-estados de momento preservam suas características pela evolução temporal.

Podemos, usando o formalismo que se segue podemos descrever situações "quase livres", em que interações provocam transições entre autoestados de momento. Isto assume que as interações são de certa forma localizadas - e este conceito precisa de uma definição razoável. Vamos listar que tipo de interações são descritas de forma bem-sucedida com o formalismo.

Universalidade:

Considere a densidade de Lagrangeana de um campo escalar com um termo de interação:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4$$

O termo de interação $\lambda \phi^4$ torna as equações de movimento não-lineares. O termo de interação pode ser escrito no espaço dos momentos como $a^\dagger(\vec{p}_1) a^\dagger(\vec{p}_2) a(\vec{p}_3) a(\vec{p}_4) \delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \vec{p}_4)$, um polinômio de 4ª ordem nos operadores, uma expressão intratável.

A priori há um número infinito de interações possíveis:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^2 + \sum_n \lambda_n \phi^n + \sum_n a_n [(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)]^n + \dots$$

Todas consistentes com invariância de Lorentz. No caso de teorias não-relativísticas, o papel é desempenhado pela simetria de Galilei. Mesmo assim há uma grande liberdade de escolha. Qual a Lagrangeana que descreve as partículas de spin 0? A verdadeira versão pode ser sucintamente colocada:

A energias baixas ou comprimentos de onda grandes todas essas Lagrangeanas são equivalentes.

Considere, por exemplo, o acoplamento:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \lambda \phi^n$$

Para $\lambda=0$ a teoria tem invariância de escala: $\kappa \rightarrow \alpha \kappa$; $\phi \rightarrow \frac{1}{\alpha} \phi$

Quando $\lambda \neq 0$, esta simetria deixa de valer - dizemos que a interação "quebra" a simetria de escala. Para mantê-la, devemos mudar, junto com x & ϕ a constante de acoplamento λ :

$\lambda_n \rightarrow \alpha^{n-4} \lambda_n$. Isto implica que os valores esperados da teoria, em particular a função de 2 pontos, possui a seguinte simetria:

$$\langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle_\lambda = \frac{1}{\alpha^2} \langle 0 | \phi(\alpha x_1) \phi(\alpha x_2) | 0 \rangle_{\alpha^{n-4} \lambda}$$

onde o subscrito após o ket indica o acoplamento no qual a teoria é calculada. Usando invariância de Lorentz e escolhendo α podemos então dizer:

$$\langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle_\lambda = \frac{1}{|x_1 - x_2|^2} F\left(\frac{|x_1 - x_2|}{\lambda^{1/(n-4)}}\right); \text{ onde } |x_1 - x_2| = (c^2(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2)^{1/2}$$

onde F é uma função genérica. Por exemplo, para $n=2$, $\lambda_n = m^2$:

$$\langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle_{m^2} \approx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{k^2 - m^2} = \frac{1}{x^2} f(m|x_1 - x_2|)$$

Agora podemos definir exatamente o que queremos dizer com "energias baixas": longas distâncias relativas à escala ditada pelo acoplamento. Efetivamente, podemos considerar $\lambda_n^{1/(n-4)}$ pequeno neste regime. Isto nos deixa dois casos:

Para $n \leq 4$, λ_n grande (a longas distâncias)

Para $n > 4$, λ_n pequeno (a longas distâncias)

Assim, a longas distâncias, todas as Lagrangeanas são aproximadas por ("fluem para"):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \lambda \phi^4$$

Acoplamentos λ_n, a_n acima em uma Lagrangeana genérica são de fato escalas com dimensão definida.

Assim, quando $\lambda_n, a_n = 0$, temos invariância de escala, que diz que a dimensão de escala de ϕ é 1: $[\phi] = 1$. (Em unidades onde $\hbar = c = 1$; dimensão de energia é o inverso da distância)

Assim, $[\mathcal{L}] = 4$; pois $S = \int d^4x \mathcal{L}$ deve ser invariante. Como $[\phi^n] = n$ então $[\lambda_n] = 4 - n$, e assim por diante. Finalmente $[a_n] = -n$. Quaisquer outros termos terão dimensão negativa.

Reescrevendo as conclusões acima, a física depende da escala. Quando esta for muito maior que $\lambda_n^{-\frac{1}{4-n}}$, termos de ordem superior se tornam irrelevantes. Neste sentido os acoplamentos λ_n e a_n tendem efetivamente a zero a longas escalas. Como $[\lambda_n] = \frac{1}{L^{4-n}}$, vemos se a teoria é "ajustada" de forma natural a escalas pequenas, isto é, com $\lambda_n = \alpha_n L_0^{4-n}$, e os números adimensionais α_n de ordem de magnitude 1 — a ideia de naturalidade — então esses

acoplamentos vão efetivamente para zero, com a exceção de $n=2$ e $n=4$, a baixas energias.

Em sistemas sem simetria de Poincaré, como em matéria condensada, duas situações podem acontecer, e ainda podemos tirar conclusões gerais com os argumentos acima:

- 1) estamos interessados nas configurações estáticas — independentes do tempo.
- 2) estamos interessados em configurações com simetria de Galilei.

No primeiro caso o raciocínio é exatamente o mesmo, com a simetria de dilatação tendo papel similar à discussão acima. Nesse caso o sistema estará "próximo" de um sistema com invariância de escala, no que o jargão de matéria condensada chama de fenômeno crítico. Estes fenômenos são universais em sistemas próximos de um ponto de transição de fase de 2^ª ordem.

O sistema paradigmático para transições de 2^ª ordem é o modelo de Ising em 2 dimensões. Na sua versão mais simples, este assume variáveis em sítios de uma rede quadrada que podem assumir dois valores, ± 1 , com interações entre primeiros vizinhos.

A hamiltoniana microscópica é dada por $H = \beta \sum_{i,j} s_i s_j$, com s_i podendo assumir os valores ± 1 e a soma cobrindo primeiros vizinhos. A altas energias — ou temperaturas — as

excitações térmicas impedem o surgimento de uma ordem de longa distância, de forma que a função de dois pontos decai exponencialmente com a distância: $\langle s_i s_j \rangle \sim e^{-|i-j|/\xi}$, onde ξ é chamado de comprimento de correlação. À medida que a temperatura cai, ξ decresce até chegar a zero na temperatura crítica. Neste momento a ordem de longa distância aparece.

Abaixo dessa temperatura, a dinâmica se torna trivial: o estado é ferromagnético. O sistema na temperatura crítica tem ordem de longa distância e simetria de escala. A dinâmica efetiva também se simplifica: o sistema é na verdade descrito por um campo efetivo que não tem massa e obedece a estatística de Fermi-Dirac, representando o spin médio sobre um número grande de sítios - variáveis de bloco de spin. Próximo ao ponto crítico, a finitude do comprimento de correlação é modelado por um termo de massa $\frac{|T-T_c|}{T_c} \bar{\Psi}\Psi$. Todos os termos de ordem mais alta se tornam irrelevantes próximo ao ponto crítico.

No segundo caso, a simetria de escala age de forma diferente entre espaço e tempo de maneira a manter compatibilidade com a simetria de Galilei - ou qualquer outra simetria que seja implementada no ponto crítico. Vamos analisar com um pouco mais de atenção o caso de simetria Galileiana. Tome a Lagrangeana integrável, a de Schrödinger:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \right] \Psi$$

é simétrica pela transformação de escala:

$$\vec{x} \rightarrow \alpha \vec{x}; \quad \Psi \rightarrow \frac{1}{\alpha} \Psi; \quad t \rightarrow \alpha^2 t$$

O tratamento das perturbações é feito então de maneira análoga ao caso relativístico, com as perturbações separadas em relevantes para o comportamento no regime de baixas energias e irrelevantes. Como caso intermediário, temos as perturbações marginais.

Teoria da perturbação: representação de interação.

Vamos usar como exemplo o bóson interagente. A lagrangeana - ou hamiltoniana - pode ser decomposta na parte livre mais a auto-interação:

$$H = H_0 + H_{int} ; \text{ com, no caso particular, } H_{int} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x):$$

na representação de interação, evoluímos os campos com H_0 :

$$\phi(t, \vec{x}) \Big|_{\lambda=0} = e^{\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_0)} \phi(t_0, \vec{x}) e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_0)} = \phi_I(t, \vec{x})$$

enquanto os estados carregam o "resto" da evolução temporal:

$$|\text{físico}\rangle_I = U(t, t_0) |\text{físico}\rangle_{\text{Heisenberg}} ; \text{ onde } U(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_0)} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t-t_0)}$$

A evolução das funções de n pontos envolvem então os operadores $\phi_H(t, \vec{x}) = \phi(t, \vec{x})$, onde:

$$\phi(t, \vec{x}) = U^\dagger(t, t_0) \phi_I(t, \vec{x}) U(t, t_0) ; \text{ com } U \text{ como acima.}$$

Note que $U(t, t_0)$ satisfaz $i\hbar \frac{\partial U}{\partial t}(t, t_0) = H_I U(t, t_0)$

$$\text{e } H_I = e^{\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_0)} H_{int} e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t-t_0)} = \int d^3x \frac{\lambda}{4!} \phi_I^4(t, \vec{x}):$$

A solução da equação para U é a série de Dyson-Schwinger, escrita de forma compacta usando o ordenamento temporal:

$$U(t, t_0) = T \left\{ e^{\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt H_I} \right\} = 1 + \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt H_I(t', t_0) - \frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t', t_0) H_I(t'', t_0) + \dots$$

que pode ser calculado com métodos usuais e o teorema de Wick. Vamos fazer uma pausa no cálculo das funções de n pontos e discutir o estado fundamental da teoria interagente, $|\Omega\rangle$. A priori este é diferente do estado fundamental da teoria livre, $|0\rangle$, construído a partir do procedimento de Fock. No entanto, suponha a existência de autoestados de $H = H_0 + H_{int}$, denotados por $|n\rangle$. Temos que:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H T} |0\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 T} |\Omega\rangle \langle \Omega|0\rangle + \sum_{n \neq 0} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n T} |n\rangle \langle n|0\rangle$$

e $E_0 = \langle \Omega | H | \Omega \rangle$. Note que $E_0 = 0$ se tivermos o cuidado de definir H_{int} com o produto normal. Porém

Muitas vezes isto não é factível. Agora faça $T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)$. Por conta do ordenamento da energia, $E_{n \neq 0} > E_0$, e os termos dependentes dos estados excitados serão irrelevantes para o limite. Assim, podemos calcular $|\Omega\rangle$:

$$|\Omega\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{1}{e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 T} \langle \Omega | 0 \rangle} e^{-\frac{i}{\hbar} H T} |0\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left[e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t_0 - (-T))} \langle \Omega | 0 \rangle \right]^{-1} e^{-\frac{i}{\hbar} H (t_0 - (-T))} e^{\frac{i}{\hbar} H_0 (T - t_0)} |0\rangle$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left[e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (t_0 - (-T))} \langle \Omega | 0 \rangle \right]^{-1} U(t_0, -T) |0\rangle$$

e assim podemos obter $|\Omega\rangle$ - a menos de normalização - evoluindo com U desde $-T$. De maneira similar temos, para o bra $\langle \Omega |$:

$$\langle \Omega | = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | U(T, t_0) \left[e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (T - t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle \right]^{-1}$$

Desta forma a função de n pontos da teoria interagente pode ser escrita em termos de correlações da teoria livre:

$$\langle \Omega | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \langle 0 | U(T, t_0) [U(t_1, t_0)]^\dagger \phi_I(x_1) U(t_1, t_0) [U(t_1, t_0)]^\dagger \phi_I(x_2) U(t_2, t_0) \dots$$

$$[U(t_n, t_0)]^\dagger \phi_I(x_n) U(t_n, t_0) U(t_0, T) |0\rangle \times \left[e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (T - t_0)} \langle 0 | \Omega \rangle \langle \Omega | 0 \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (T - t_0)} \right]^{-1}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left[|\langle 0 | \Omega \rangle|^2 e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 (2T)} \right]^{-1} \langle 0 | U(T, t_1) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \phi_I(x_2) \dots \phi_I(x_n) U(t_n, -T) |0\rangle$$

Assim:

$$\langle \Omega | \phi(x_1) \dots \phi(x_n) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \left[\langle 0 | U(T, -T) |0\rangle \right]^{-1} \langle 0 | U(T, t_0) \phi_I(x_1) U(t_1, t_2) \dots \phi_I(x_n) U(t_n, T) |0\rangle$$

ou, usando o ordenamento temporal, lembrando que $U(t_1, t_2) = T \left\{ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_2}^{t_1} H_{int} dt \right] \right\}$, temos:

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T \{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \} |0\rangle}{\langle 0 | T \left\{ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{-T}^T dt H_{int}(t) \right] \right\} |0\rangle}$$

que é muitas vezes referenciado como o teorema de Gell-mann e Low.

Tomemos agora o exemplo da teoria $\lambda\phi^4$:

$$G(x_1, x_2) = \langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | \Omega \rangle \simeq \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) e^{\frac{i\lambda}{24} \int d^4z \phi^4(z)} \} |0\rangle$$

Expandindo em λ :

$$G(x_1, x_2) \cong \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle + \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \phi^4(z) \} | 0 \rangle + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{i\lambda}{4!} \right)^2 \int d^4z_1 \int d^4z_2 \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} \phi^4(z_1) \phi^4(z_2) \} | 0 \rangle + \dots$$

Cujo cálculo vamos conduzir agora.

Regras de Feynman para $\lambda\phi^4$.

Vimos acima que o cálculo de valores esperados da teoria interagente é equivalente via o teorema de Gallmann e Low ao cálculo de valores esperados da teoria livre. Este último é conduzido pelo teorema de Wick. Vimos que o teorema de Wick reduz o cálculo das funções de n pontos a um produto de funções de 2 pontos. Por isso faz sentido apresentar uma regra mnemônica para esse cálculo que tem também uma interpretação espaço-temporal para os processos envolvidos.

No espaço das posições, o propagador para o campo livre tem a forma:

$$\langle 0 | T \{ \phi(x_1) \phi(x_2) \} | 0 \rangle_{\lambda=0} = D_F(x_1, x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{c^2 p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i\omega(t_1 - t_2) + i\vec{p} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)}$$

A transformada de Fourier nos dá a expressão para o espaço dos momentos:

$$\langle 0 | T \{ \tilde{\phi}(p_1) \tilde{\phi}(p_2) \} | 0 \rangle_{\lambda=0} = \tilde{D}_F(p_1, p_2) = (2\pi\hbar)^4 \delta(p_1 + p_2) \frac{i}{c^2 p_1^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} ; \text{ onde } p_i = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \text{ é o 4-momento.}$$

Por isso temos uma representação diagramática do propagador:

$$\begin{array}{c} \bullet \text{---} \bullet \\ x \qquad y \end{array} : D_F(x-y) ; \qquad \begin{array}{c} \text{---} \\ 1 \qquad 2 \end{array} : \frac{i}{c^2 p^2 - m^2 c^4 + i\epsilon}$$

Vamos ilustrar a diagramática no caso da teoria $\lambda\phi^4$. Usando o teorema de Wick para calcular a correção de 1ª ordem ao propagador:

$$-i \frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left[\langle \overbrace{\phi(x_1) \phi(x_2)} \overbrace{\phi(z) \phi(z)} \overbrace{\phi(z) \phi(z)} \rangle \times 3 + \langle \overbrace{\phi(x_1) \phi(x_2) \phi(z) \phi(z)} \overbrace{\phi(z) \phi(z)} \rangle \times 4 \times 3 \right]$$

e $3 + 4 \times 3 = \binom{6}{2} = 15$ é o número total de termos. A versão no espaço dos momentos é:

$$\langle \phi(p_1) \phi(p_2) \rangle = -i \frac{\lambda}{4!} \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi\hbar)^4} \dots \frac{d^4 q_4}{(2\pi\hbar)^4} \times (2\pi\hbar)^4 \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \times \left\{ \langle \overbrace{\phi(p_1) \phi(p_2)} \overbrace{\phi(q_1) \phi(q_2) \phi(q_3) \phi(q_4)} \rangle \times 3 + \right. \\ \left. \langle \overbrace{\phi(p_1) \phi(p_2) \phi(q_1) \phi(q_2)} \overbrace{\phi(q_3) \phi(q_4)} \rangle \times 4 \times 3 \right\} \\ = -i \frac{\lambda}{4!} \left[3 \cdot (2\pi\hbar)^4 \frac{i \delta(p_1 + p_2)}{c^2 p^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(0) \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{d^4 q_3}{(2\pi\hbar)^4} \cdot \frac{i}{c^2 q_1^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \frac{i}{c^2 q_3^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} + 12 \cdot (2\pi\hbar)^4 \times \right. \\ \left. \times \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi\hbar)^4} \dots \frac{d^4 q_4}{(2\pi\hbar)^4} \times \delta(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \times (2\pi\hbar)^4 \frac{i \delta(p_1 + k_2)}{c^2 p_1^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \frac{i \delta(p_2 + k_1)}{c^2 p_2^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \times (2\pi\hbar)^4 \frac{i \delta^4(q_3 + q_4)}{c^2 q_3^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \right]$$

onde entendemos $(2\pi)^4 \delta^4(0) = V$: volume do espaço-tempo. Os termos resultam:

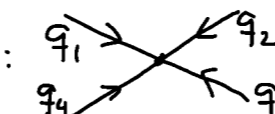
$$1^\circ \text{ termo: } 3 (2\pi\hbar)^4 \delta(p_1 + p_2) \frac{iV}{c^2 p^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \left[\int \frac{d^4 q}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i}{c^2 q^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \right]^2$$

$$2^\circ \text{ termo: } 12 \cdot \left[\int \frac{d^4 q_3}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i}{c^2 q_3^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \right] \frac{i}{c^2 p_1^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \frac{(2\pi\hbar)^4 \delta^4(p_1 + p_2)}{c^2 p_2^2 - m^2 c^4 + i\epsilon}; \text{ Note que } \left[\int \frac{d^4 q}{(2\pi\hbar)^4} \frac{i}{c^2 q^2 - m^2 c^4 + i\epsilon} \right] = D_F(z-z)$$

O aparecimento de termos como $D_F(z-z)$ é uma decorrência da localidade. No espaço dos momentos, isto implica na conservação do 4-momento, em termos como $\delta^4\left(\sum_i p_i\right)$.

No espaço real, podemos representar a conta como:

$$3 \times \begin{array}{c} \text{---} \\ x \quad y \end{array} \oint_z + 12 \times \begin{array}{c} \text{---} \\ x \quad z \quad y \end{array}$$

No espaço dos momentos, é simples representar a interação: ; $\sum_i q_i = 0$, e assim:

$$3 \times \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} \oint_{q_1, q_2} + 12 \times \begin{array}{c} \text{---} \\ \xrightarrow{p_1} \quad \text{---} \\ \text{---} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} \oint_{q_3}$$

Podemos também representar operadores externos - responsáveis pelos estados $|\vec{p}\rangle$:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \xrightarrow{p} \end{array}; \text{ associado a } \frac{i}{c^2 p^2 - m^2 c^4 + i\epsilon}$$

Assim temos regras para associar a cada gráfico uma parcela no cálculo de teoria de perturbações:

$$1) \text{ Para cada linha associamos um propagador: } \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} = \frac{i}{c^2 p^2 - m^2 c^4 + i\epsilon}$$

$$2) \text{ Para cada vértice com quatro pernas: } \begin{array}{c} p_1 \quad p_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ p_3 \quad p_4 \end{array} : -i\lambda (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4)$$

3) Divida pelo fator de simetria (cuja discussão será feita mais tarde).

4) Integre $\frac{d^4 p}{(2\pi\hbar)^4}$ para cada momento indeterminado.

São as chamadas regras de Feynman.

Diagramas desconexos

no cálculo da função de dois pontos da teoria interagente, notamos a existência de diagramas desconexos,

onde a contração entre os termos da hamiltoniana de interação não se misturam com os termos da função

de n pontos: $\langle \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} \overbrace{\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(z)} \rangle = \overbrace{x_1} \text{---} \overbrace{x_2} \int z$. Estes termos na verdade divergem, mas são

cancelados pelos termos no denominador da fórmula dada pelo teorema de Gell-Mann e Low:

$$\begin{aligned} \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle_\lambda &= \langle \phi(x_1)\phi(x_2) e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)} \rangle_{\lambda=0} / \langle e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)} \rangle_{\lambda=0} \\ &= \left[D_F(x_1-x_2) - i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(z) \rangle + \dots \right] / \left[1 - i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \langle \phi^4(z) \rangle + \dots \right] \\ &= D_F(x_1-x_2) \left[1 - \frac{i\lambda}{4!} \int d^4z D_F(z-z)^2 + 12 \cdot \frac{\lambda}{4!} \left(\begin{array}{c} \text{diagramas} \\ \text{conexos} \end{array} \right) + \dots \right] / \left[1 - i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z D_F(z-z)^2 + \dots \right] \\ &= D_F(x-y) + 12\lambda \left(\begin{array}{c} \text{diagramas} \\ \text{conexos} \end{array} \right) + \mathcal{O}(\lambda^2) \end{aligned}$$

Mais geralmente, os diagramas desconexos pertencem aos seguintes casos:

$$\begin{aligned} 1) \langle \phi(x_1)\phi(x_2) e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)} \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^n \int d^4z_1 \dots d^4z_n \langle \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} \overbrace{\phi^4(z_1)\dots\phi^4(z_n)} \rangle + \dots \\ &= D_F(x_1-x_2) \langle e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)} \rangle + \dots \end{aligned}$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{i\lambda}{4!} \right)^n \langle \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)} \overbrace{\phi^4(z_2)\dots\phi^4(z_n)} \rangle = -\frac{i\lambda}{4!} \left(\begin{array}{c} \text{diagrama} \\ \text{conexo de } \lambda \end{array} \right) \times 12 \times \langle e^{-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \phi^4(z)} \rangle$$

Assim a soma final tem termos como (apenas conexos!)

$$\overbrace{x} \text{---} \overbrace{y} = \overbrace{x} \text{---} \overbrace{y} + \overbrace{x} \text{---} \overbrace{z} \text{---} \overbrace{y} + \overbrace{x} \text{---} \overbrace{z_1} \text{---} \overbrace{z_2} \text{---} \overbrace{y} + \overbrace{x} \text{---} \overbrace{z_1} \text{---} \overbrace{z_2} \text{---} \overbrace{y} + \overbrace{x} \text{---} \overbrace{z_1} \text{---} \overbrace{z_2} \text{---} \overbrace{y} + \dots$$

Note que isto resolve um problema em potencial pois todos os diagramas desconexos carregam um termo de

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} = \delta(0) = VT \text{ (volume do espaço-tempo)}$$

Fatores de simetria

Considere as correções de ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$ à função de dois pontos:

$$\textcircled{1} \quad \overbrace{\quad} \text{---} \overbrace{\quad} \quad \textcircled{2} \quad \overbrace{\quad} \text{---} \overbrace{\quad} \quad \textcircled{3} \quad \overbrace{\quad} \text{---} \overbrace{\quad}$$

$$\textcircled{1} : \langle \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)} \overbrace{\phi(z_2)\phi(z_2)\phi(z_2)\phi(z_2)} \rangle ; \quad \textcircled{2} : \langle \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_1)} \overbrace{\phi(z_2)\phi(z_2)\phi(z_2)\phi(z_2)} \rangle$$

$$\textcircled{3}: \langle \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(z_1)\phi(z_1)} \overbrace{\phi(z_1)\phi(z_1)\phi(z_2)\phi(z_2)} \overbrace{\phi(z_2)\phi(z_2)} \rangle$$

Todos os três têm o fator numérico de $\frac{1}{2!} \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^2 = -\frac{1}{2 \cdot 24^2}$, vindo do parâmetro de perturbação. Cada um dos termos tem o fator de simetria associado ao número de maneiras de realizar as contrações:

$$\textcircled{1} \quad 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow \frac{4! \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 24^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow S = 4$$

$$\textcircled{2} \quad 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow \frac{4! \cdot 4 \cdot 2}{2 \cdot 24^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow S = 6$$

$$\textcircled{3} \quad 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \Rightarrow \quad \quad \quad \Rightarrow S = 4$$

A regra geral: o fator de simetria é a ordem do grupo de permutação das linhas internas que deixam o diagrama inalterado.