

Segunda quantização.

Apesar do sucesso em descrever os níveis de energia do átomo de hidrogênio, a equação de Dirac possui alguns problemas:

1) Temos 4 soluções L.I., mas - pelo menos na ausência de potencial - só são observados a baixas energias 2 delas, correspondendo a elétrons com spin $\pm \frac{1}{2}$. O que são as duas soluções com $E < 0$?

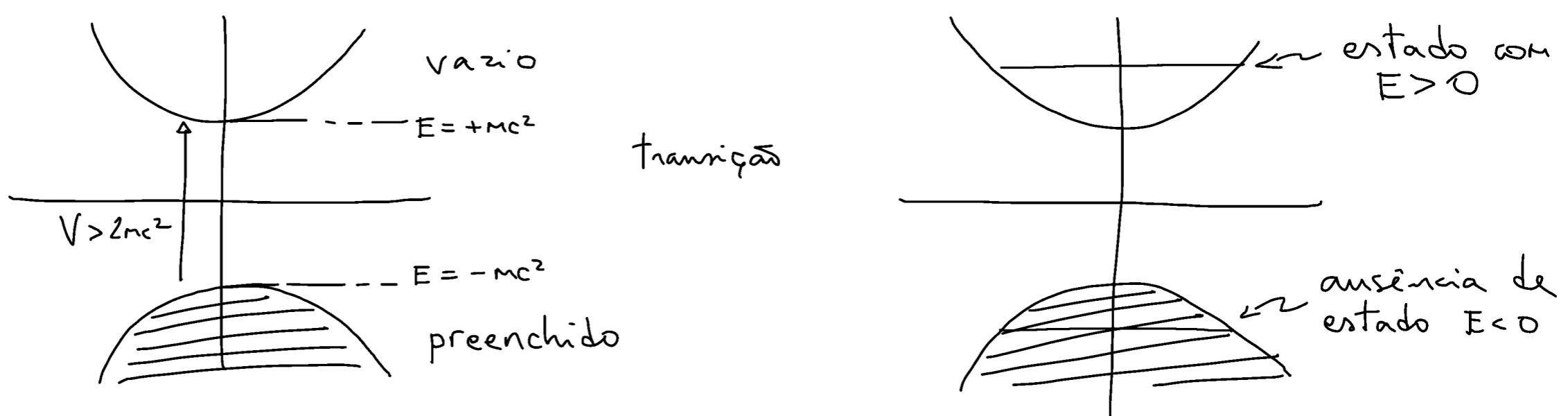
2) Porque o vácuo (i.e. estado fundamental) é estável? O que proíbe o processo

$$|\text{vácuo}\rangle \rightarrow |E < 0\rangle + \text{fótons}$$

de acontecer quando ligamos as interações?

3) Como resolver os aparentes paradoxos de unitariedade (paradoxo de Klein, por exemplo)?

Para resolver 2) Dirac propôs que os estados com $E < 0$ já estariam preenchidos, e o princípio da exclusão de Pauli proibiria assim o surgimento de estados com $E < 0$. A princípio a ideia pode ser usada para explicar o processo de criação de pares quando o campo eletrônico está sob a ação de um potencial externo:



Assim a ausência de um estado com $E < 0$ (e $q = -e$) é notada como com energia positiva, e carga $q = +e$

Em 1930, quando Dirac propôs esse conceito (chamado de "mar de Dirac"), ele julgava que esse estado com carga positiva corresponderia ao próton (mesmo com a disparidade de massas). Felizmente, em

1932, Carl D. Anderson descobriu o pósitron analisando a deflexão de raios cósmicos por um campo magnético. Apparentemente Anderson não sabia da previsão de Dirac.

Mesmo com esses sucessos, a teoria ainda tem problemas a serem resolvidos:

- 1) Há partículas com spin 0 ou 1? O argumento "1ª ordem" de Dirac parece dizer que não.
- 2) O princípio da exclusão de Pauli funciona apenas com férmions. O que impede o surgimento espontâneo de estados com $E < 0$ no caso de bósons?
- 3) Onde está o campo elétrico gerado por todos estes estados com $E < 0$?

Estes problemas acabam sendo resolvidos - de forma mais ou menos satisfatória - pela consideração da teoria quântica de campos interagente. No caso de matéria condensada, muitas vezes sabe-se a priori a solução: a carga do "mar de Fermi" é cancelada (quase que totalmente) pelas cargas dos núcleos.

Tratamento quântico do Princípio da Exclusão.

Segundo o princípio da exclusão de Pauli, um estado quântico $|\psi\rangle$ só pode ser ocupado por 1 elétron. No caso da partícula livre $|\psi\rangle$ é parametrizado pelo momento e pelo spin. Esquemáticamente, denotamos o estado desocupado por $|0\rangle$ e o ocupado por $|1\rangle$. Definimos o operador de criação e destruição a^\dagger & a :

$$a^\dagger|0\rangle = |1\rangle \quad \text{e} \quad a|1\rangle = |0\rangle$$

a ação do operador de criação em um estado ocupado deve ser zero:

$$a^\dagger|1\rangle = 0 \quad \rightarrow \text{caso contrário ele contribuiria para transições.}$$

pelo mesmo motivo, $a|0\rangle = 0$ (o que pode ser entendido como definição de $|0\rangle$)

As condições podem ser escritas de forma mais sucinta:

$$aa^\dagger + a^\dagger a = \mathbb{1} = \{a, a^\dagger\} \quad (\text{anti-comutador})$$

Uma representação matricial: $a^\dagger = \sigma^+$ e $a = \sigma^-$; σ^\pm as matrizes de levantamento e abaixamento para estados com spin $\frac{1}{2}$.

O operador $a^\dagger a = N$ conta o número de ocupação dos estados. Se o estado possui energia $\hbar\omega$, então a energia (ou hamiltoniana) é dada por $H = \hbar\omega a^\dagger a$.

No nosso caso, a equação de Dirac, os estados são representados pelas soluções de onda plana $u^\pm(\vec{p})e^{\pm i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$ e $v^\pm(\vec{p})e^{\mp i(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$. Para popular os estados $u^\pm(\vec{p})$, vamos introduzir

operadores $a^r(\vec{p})$ e $a^{\dagger r}(\vec{p})$ que criam ou destroem um estado de momento \vec{p} e spin r . Eles

satisfazem: $\{a^{\dagger r}(\vec{p}), a^s(\vec{p}')\} = (2\pi\hbar)^3 \delta^{rs} \delta^3(\vec{p} - \vec{p}')$ (o δ deve ser entendida como distribuição)

A energia total do setor $u^\pm(\vec{p})$ é dada por:

$$H_u = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \hbar\omega(\vec{p}) a^{\dagger r}(\vec{p}) a^r(\vec{p}); \quad \text{onde } \hbar\omega(\vec{p}) = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

como a soma de energias de cada estado ocupado.

Para tratar dos estados com energia negativa, introduzimos mais um par $b^r(\vec{p})$, $b^{\dagger r}(\vec{p})$, com as mesmas relações de anticomutação, mas com o entendimento que esses estados são ocupados e assim o estado fundamental é aniquilado por $b^{\dagger r}(\vec{p})$. Para evitar confusões, vamos renomear os operadores e entender $b^r(\vec{p})$ e $b^{\dagger r}(\vec{p})$ como operadores de destruição e criação de buracos. A nova hamiltoniana é obtida diretamente:

$$H = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \hbar\omega(\vec{p}) (a^{\dagger r}(\vec{p}) a^r(\vec{p}) + b^{\dagger r}(\vec{p}) b^r(\vec{p}))$$

Para uma descrição do sistema quantizado agora temos de introduzir um operador que nos dê informação sobre a função de onda do sistema. Note que o sistema agora pode ter um número

arbitrário de partículas, mas a função de onda de partículas com valor bem definido de \vec{p} deve ser a superposição (propriamente antissimetrizada) das soluções de onda plana $u^{\pm}(\vec{p}), v^{\pm}(\vec{p})$.

Assim, por simplicidade, podemos construir o operador especificando o setor de uma partícula:

$$\langle \vec{x} | \vec{p}, r \rangle = C(\vec{p}) u^r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}; \text{ onde } C(\vec{p}) \text{ é uma constante de normalização.}$$

Essa expressão é comum em mecânica quântica não-relativística, mas merece um pouco de cuidado agora. O estado de um elétron com momento \vec{p} e spin r é criado a partir do estado de vácuo pela ação de $a^{+r}(\vec{p})$ (ou de $b^{+r}(\vec{p})$ no caso do pósitron). O estado $|\vec{x}\rangle$ é mais confuso.

Pela relação acima, vamos supor que $|\vec{p}, r\rangle$ é uma base completa e definir:

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | &= \langle 0 | \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} C(\vec{p}) \left[a^r(\vec{p}) u^r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} + b^{+r}(\vec{p}) v^r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} \right] \\ &= \langle 0 | \Psi(\vec{x}; t=0) \end{aligned}$$

onde $\Psi(\vec{x}, t)$ é o operador de campo. Apesar da definição, o estado $|\vec{x}\rangle$ não faz parte do espectro, pois o valor esperado da energia é infinito. Por outro lado, a definição de operador de campo nos será muito útil.

Os estados de 1 partícula são autoestados da energia, assim sua evolução temporal é conhecida:

$$|\vec{p}, r; t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} |\vec{p}, r\rangle; \text{ onde } E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

na representação de Heisenberg; $a^{+r}(\vec{p}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} a^{+r}(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} H t} = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} a^{+r}(\vec{p})$, e, analogamente:

$a^r(\vec{p}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} a^r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} H t} = e^{\frac{i}{\hbar} E t} a^r(\vec{p})$. Para $b^r(\vec{p})$ e $b^{+r}(\vec{p})$ a relação é trocada:

$$b^r(\vec{p}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} b^r(\vec{p}) \quad \text{e} \quad b^{+r}(\vec{p}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} E t} b^{+r}(\vec{p})$$

Assim o operador de campo tem evolução temporal determinada:

$$\Psi(\vec{x}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \Psi(\vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar} H t} = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} C(\vec{p}) \left[a^r(\vec{p}) u^r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} (E t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + b^{+r}(\vec{p}) v^r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar} (E t - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right]$$

Alguns comentários:

- $\Psi(\vec{x}, t)$ satisfaz a equação de Dirac:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = [c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) + \alpha_4 mc^2] \Psi; \quad \text{ou ainda} \quad [i\hbar c \gamma^m \frac{\partial}{\partial x^m} + mc^2] \Psi = 0$$

poém agora Ψ é um operador. As constantes envolvidas na expansão de Ψ em ondas planas são promovidas a operadores, daí o nome de "2ª quantização".

- As funções de onda $u^r(\vec{p})$ e $v^r(\vec{p})$ obtidas a partir das soluções de onda plana da equação de Dirac foram normalizadas de forma que a corrente de probabilidade é um vetor unitário. As expressões podem ser verificadas diretamente:

$$u^{tr}(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = \frac{E}{c^2 p} \delta^{rs} = v^{tr}(\vec{p}) v^s(\vec{p}); \quad \bar{u}^r(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = \frac{m}{p} \delta^{rs}; \quad \bar{v}^r(\vec{p}) v^s(\vec{p}) = -\frac{m}{p} \delta^{rs}$$

$$\bar{u}^r(\vec{p}) v^s(\vec{p}) = \bar{v}^r(\vec{p}) u^s(\vec{p}) = 0; \quad u^{tr}(\vec{p}) v^s(-\vec{p}) = v^{tr}(-\vec{p}) u^s(\vec{p}) = 0$$

$$\sum_{r=1}^2 u^r(\vec{p}) \bar{u}^r(\vec{p}) = \frac{1}{2c^2 p} (E \alpha_4 + c \vec{p} \cdot \vec{\alpha} \alpha_4 + mc^2); \quad \sum_{r=1}^2 v^r(\vec{p}) \bar{v}^r(\vec{p}) = \frac{1}{2c^2 p} (E \alpha_4 + c(\vec{p} \cdot \vec{\alpha}) \alpha_4 - mc^2)$$

- O espectro da teoria é gerado por aplicações sucessivas de $a^{tr}(\vec{p})$ e $b^{tr}(\vec{p})$ no estado de

vácuo: $a^{tr_1}(\vec{p}_1) \dots a^{tr_n}(\vec{p}_n) b^{ts_1}(\vec{q}_1) \dots b^{ts_m}(\vec{q}_m) |0\rangle = |\vec{p}_1, r_1, \dots, \vec{p}_n, r_n, \vec{q}_1, s_1, \dots, \vec{q}_m, s_m\rangle$ é o

estado de n elétrons com momentos $\{\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\}$ e spins $\{r_1, \dots, r_n\}$ e m pósitrons com momentos $\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_m\}$ e spins $\{s_1, \dots, s_m\}$. Note que tal estado é por construção antissimétrico com relação à troca de quaisquer 2 partículas, sejam elas elétrons ou pósitrons. Por construção, os estados satisfazem o princípio da exclusão de Pauli.

O espaço vetorial gerado pelos estados de n partículas assim construído é chamado de espaço de Fock.

- Com a definição dada o operador conjugado $\bar{\Psi}(\vec{x}, t) = \Psi^\dagger(\vec{x}, t) \alpha_4$ também pode ser definido:

$$\bar{\Psi}(\vec{x}, t) = \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \bar{C}(\vec{p}) \left[a^{tr}(\vec{p}) \bar{u}^r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} + b^r(\vec{p}) \bar{v}^r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right]$$

A partir das relações de anticomutação entre $a^r(\vec{p})$ e $a^{tr}(\vec{p})$; $b^r(\vec{p})$ e $b^{tr}(\vec{p})$, podemos calcular as relações de anticomutação entre as componentes espaciais de $\Psi(\vec{x}, t=0)$ e $\Psi^\dagger(\vec{x}', t=0)$:

$$\begin{aligned} \{\Psi(\vec{x}), \Psi^\dagger(\vec{x}')\}_{t=t'=0} &= \sum_{r,s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3q}{(2\pi\hbar)^3} C(\vec{p}) \bar{C}(\vec{q}) \left[\{a^r(\vec{p}), a^{ts}(\vec{q})\} u^r(\vec{p}) u^{ts}(\vec{q}) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{q}\cdot\vec{x}')} + \right. \\ &\quad \left. \{b^{tr}(\vec{p}), b^s(\vec{q})\} v^r(\vec{p}) v^{ts}(\vec{q}) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{q}\cdot\vec{x}')} \right] \\ \text{usando as expressões:} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{|C(\vec{p})|^2}{2c^2p} \left[(E + c(\vec{p}\cdot\vec{\alpha}) + mc^2\alpha_4) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + (E - c(\vec{p}\cdot\vec{\alpha}) - mc^2\alpha_4) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \right] = \delta^3(\vec{x}-\vec{x}') \mathbb{1} \\ \text{para } \sum u\bar{u} \text{ e } \sum v\bar{v}: \end{aligned}$$

onde escolhemos $C(\vec{p}) = \sqrt{\frac{c^2p}{E}}$ para a constante de normalização.

Se tivéssemos o comutador igual a δ ao invés do anticomutador, poderíamos pensar em $\bar{\Psi}$ como o "operador conjugado" a $\Psi(\vec{x})$. Por abuso de linguagem, iremos pensar dessa forma e usar os operadores $\Psi(\vec{x})$ e $\bar{\Psi}(\vec{x})$ como parametrização do "espaço de fase" do sistema. Esta definição será conveniente por implicar em um procedimento para a segunda quantização que pode ser facilmente implementado no caso bosônico.

Como $\Psi(\vec{x})$ e $\bar{\Psi}(\vec{x})$ são agora operadores canonicamente conjugados, iremos reescrever a hamiltoniana em termos deles. Usando:

$$\begin{aligned} a^r(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{c^2p}{E}} \int d^3x u^{tr}(\vec{p}) \Psi(\vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}; & b^{tr}(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{c^2p}{E}} \int d^3x v^{tr}(\vec{p}) \Psi(\vec{x}) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \\ a^{tr}(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{c^2p}{E}} \int d^3x \Psi^\dagger(\vec{x}) u^r(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}}; & b^r(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{c^2p}{E}} \int d^3x \Psi^\dagger(\vec{x}) v^r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \end{aligned}$$

e a expressão da hamiltoniana, chegamos a

$$\begin{aligned} H &= \sum_r \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} E \frac{c^2p}{E} \int d^3x d^3x' \left\{ \Psi^\dagger(\vec{x}) u^r(\vec{p}) u^{tr}(\vec{p}) \Psi(\vec{x}') e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + v^{tr}(\vec{p}) \Psi(\vec{x}') \Psi^\dagger(\vec{x}) v^r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x d^3x' \left\{ \Psi^\dagger(\vec{x}) (E - i\hbar c(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}) + mc^2\alpha_4) \Psi(\vec{x}') - \Psi^\dagger(\vec{x}) (E + i\hbar c(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}) - mc^2\alpha_4) \Psi(\vec{x}') \right\} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} + H_0 \\ &= \int d^3x \Psi^\dagger(\vec{x}) \left[-i\hbar c(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}) + mc^2\alpha_4 \right] \Psi(\vec{x}) + H_0 \end{aligned}$$

Note que a hamiltoniana pode ser escrita como a integral de uma densidade de energia, o integrando. A constante H_0 é dada formalmente por:

$$H_0 = + \sum_{r=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} c^2 p \int d^3x d^3x' v^{tr}(\vec{p}) \{ \psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{x}') \} v^r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} \\ = + \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3x \cdot 2E(p) = + 4(\text{Volume}) \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\hbar\omega(p)}{2} = \infty$$

O que corresponde a uma energia infinita associada ao vácuo. Por outro lado, ela é independente do campo, influenciando todos os estados do espectro da mesma maneira, por uma fase não-observável. A menos que se mude a relação de dispersão, H_0 não é observável.

Essas mudanças são mais simples de implementar no caso de cristais, e outros sistemas genéricos em matéria condensada. Na esmagadora maioria das aplicações em altas energias, pode-se tomar $H_0 = 0$.

A partir da relação canônica de conjugação também podemos calcular a lagrangeana do sistema a partir dos operadores de campo:

$$L = \int d^3x i\hbar \psi^\dagger(\vec{x}) \dot{\psi}(\vec{x}) - \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) (-i\hbar c(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) + \alpha_4 mc^2) \psi(\vec{x}) \\ = \int d^3x \psi^\dagger(\vec{x}) \left[i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\hbar c(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) - \alpha_4 mc^2 \right] \psi(\vec{x}) = \int d^3x \bar{\psi}(\vec{x}) \left[i\hbar c \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc^2 \right] \psi(\vec{x})$$

Note mais uma vez que a lagrangeana pode ser escrita como a integral de uma densidade de lagrangeana que é local no espaço. As equações de Euler-Lagrange associadas podem ser obtidas diretamente considerando $\bar{\psi}(\vec{x})$ e $\psi(\vec{x})$ como variáveis independentes e aplicando o

conceito de derivada funcional: $\frac{\delta}{\delta \psi(\vec{x})}$; definida por $\frac{\delta \psi(\vec{y})}{\delta \psi(\vec{x})} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$. A variação da ação com respeito a $\psi(\vec{x})$ produz a equação de Dirac associada a $\bar{\psi}(\vec{x}, t)$.

Como último exercício considere a função de 2 pontos: $\langle 0 | \psi(\vec{x}, t) \bar{\psi}(\vec{x}', t') | 0 \rangle$, que terá aplicação em teoria da perturbação no restante do curso. Dadas as definições de $\psi(\vec{x}, t)$ e $\bar{\psi}(\vec{x}, t)$, temos um cálculo direto:

$$\langle 0 | \sum_{r,s=1}^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \sqrt{\frac{c^2 p}{E}} \sqrt{\frac{c^2 p'}{E'}} a^r(\vec{p}) u^r(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} a^{t's}(\vec{p}') \bar{u}^s(\vec{p}') e^{\frac{i}{\hbar}(E't' - \vec{p}' \cdot \vec{x}')} | 0 \rangle =$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E} (E\alpha_4 + c(\vec{p}\cdot\vec{\alpha})\alpha_4 + mc^2) e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t') + \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} = \left(i\hbar\alpha_4 \frac{\partial}{\partial t} - i\hbar c(\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla}) + mc^2 \right) D^+(t-t'; \vec{x}-\vec{x}')$$

onde $D^+(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E(\vec{p})} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}$ é uma função de Green para a equação de Klein-Gordon.

Isso pode ser verificado usando o teorema de Cauchy para representar $D^+(t, \vec{x})$ como uma integral em

4 dimensões:

$$D^+(t, \vec{x}) = \oint_C \frac{dE}{2\pi i} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}}{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4} ; \text{ onde } C \text{ é um caminho fechado ao redor do pólo } E = +\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

Ao atuar com o operador de Klein-Gordon $(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 c^2 \nabla^2 - m^2c^4)$, vemos que $D^+(t, \vec{x})$ satisfaz:

$$(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 c^2 \nabla^2 - m^2c^4) D^+(t, \vec{x}) = i\hbar \delta^4(t, \vec{x})$$

Nessa representação, a função de 2 pontos pode ser escrita como:

$$\langle 0 | \Psi(\vec{x}, t) \bar{\Psi}(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \int_C \frac{dE}{2\pi i} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{E\alpha_4 + c(\vec{p}\cdot\vec{\alpha})\alpha_4 + mc^2}{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} = -i \frac{\hbar}{c} \int \frac{d^4p}{(2\pi\hbar)^4} \frac{p_\mu \gamma^\mu + mc}{p_\mu p^\mu - m^2} e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}$$

onde usamos a notação covariante no último passo.

$D^+(t, \vec{x})$ pode ser calculado em termos de funções de Bessel modificadas. Usando invariância de

Lorentz da equação de Klein-Gordon, podemos calcular $D^+(z)$ para os casos de separação tipo

tempo $z^2 = c^2 t^2 - |\vec{x}|^2 > 0$ e tipo espaço $z^2 = t^2 - \frac{|\vec{x}|^2}{c^2} < 0$ separadamente.

1) Para $z^2 > 0$, fazemos uma transformação de Lorentz de tal forma que $\vec{x} = 0$. A integral é então:

$$D^+(z) = 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} e^{-\frac{i}{\hbar}\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} z} = \frac{M^2 c}{4\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty dz \sinh^2 z e^{-\frac{i}{\hbar} m c^2 z \cosh z} = \frac{M^2 c}{4\pi^2 \hbar^3} \left(-\frac{\pi i}{4} H_0^{(2)}\left(\frac{M c^2 z}{\hbar}\right) - \frac{\pi i}{4} H_2^{(2)}\left(\frac{M c^2 z}{\hbar}\right) \right) \\ = -\frac{i}{4\pi} \frac{M}{\hbar c} \frac{1}{z} H_1^{(2)}\left(\frac{M c^2 z}{\hbar}\right) ; \text{ usando a representação } H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{1}{2}i\pi\nu}}{i\pi} \int_0^\infty e^{-iz \cosh t - \nu t} dt$$

2) Para $z^2 < 0$, fazemos uma transformação para $t=0$, e assim $z^2 = -\frac{r^2}{c^2}$, com $r^2 > 0$ a distância própria.

$$D^+(r) = 2\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}} \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{\frac{i}{\hbar} p r \cos\theta} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{M}{2r} \int_0^\infty dz \sin\left(\frac{M c}{\hbar} r \sinh z\right) \sinh z = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{M}{2r} K_1\left(\frac{M c}{\hbar} r\right)$$

de novo, fazendo uso da representação $K_\nu(x) = \csc\left(\frac{\nu\pi}{2}\right) \int_0^\infty dz \sin(x \sinh z) \sinh(\nu z)$. Note que $D^+(r)$ tem um

comportamento exponencial para separações do tipo espaço, pois $K_1(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$ quando $x \gg 1$. O estudo deta-

lhado das funções de 2 pontos será objeto da segunda unidade.