

## Quantização do campo eletromagnético.

As equações de movimento do campo eletromagnético (no vácuo) são as equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

A presença de interações - acoplamentos entre o campo eletromagnético e outros campos - modifica a primeira e a quarta equações. Por isso faz sentido resolver imediatamente a segunda e a terceira equações:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}; \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \varphi \text{ e } \vec{A} \text{ são arbitrários.}$$

Substituindo nas duas equações restantes:

$$-\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = 0; \quad \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \nabla \varphi \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

O que é um sistema acoplado envolvendo  $\varphi$  e  $\vec{A}$ . Há porém algo que desconhecemos. Introduzimos as funções  $\varphi$  e  $\vec{A}$  acima para resolver a lei de Gauss para o magnetismo e a lei de Faraday. Contudo a associação entre  $\varphi$ ,  $\vec{A}$  e a configuração física de campo, ditada por  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  não é única. Dados certos  $\varphi$  e  $\vec{A}$ , podemos verificar que:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda; \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}; \quad \text{chamada simetria de calibre.}$$

resulta na mesma configuração de campo elétrico e magnético. Agora podemos usar essa liberdade para resolver as equações de movimento restantes. Reescrevendo as equações de movimento para  $\vec{A}$  e  $\varphi$ :

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right); \quad \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

notamos que é conveniente escolher  $\Lambda$  tal que o termo do lado direito das equações acima se anulem:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}; \quad \text{ou seja } \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Lambda = - \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$

que é uma equação não homogênea que pode ser resolvida pelos métodos usuais. Com esta escolha, chamada escolha de calibre de Lorentz, temos essencialmente quatro equações de onda desacopladas

ou equações de Klein-Gordon para massa nula. A solução geral pode ser escrita como uma superposição de ondas planas:

$$\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} [a_0(\vec{k})e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + a_0^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}]; \quad \vec{A} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_p} [\vec{a}(\vec{k})e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} + \vec{a}^\dagger(\vec{k})e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}]$$

com as componentes de  $a_0$  e  $\vec{a}$  satisfazendo relações de comutação:

$$[a_0(\vec{k}), a_0^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta(\vec{k} - \vec{k}'); \quad [a^i(\vec{k}), a^j(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{ij} \delta(\vec{k} - \vec{k}'); \quad i, j = 1, 2, 3.$$

e  $\omega_p = +\sqrt{p^2 c^2}$ . Há porém dois problemas com essa atribuição. O primeiro é a existência de 4 polarizações distintas para o campo eletromagnético. O segundo é a quebra da invariância de Lorentz.

Sob uma transformação de Lorentz,  $(\psi, \vec{A})$  se transforma como um 4-vetor e assim o comutador deve se transformar como um tensor de 2ª ordem. A única escolha para tal tensor é a métrica  $\eta_{\mu\nu}$  - aqui definida como tendo elementos na diagonal dados por  $(+c^2, -1, -1, -1)$ . Assim para impor relações de comutação consistentes com a invariância de Lorentz devemos fazer:

$$[a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')] = -(2\pi)^3 2\omega_k \eta_{\mu\nu} \delta(\vec{k} - \vec{k}'); \quad \text{note a pequena modificação em } a_0(\vec{k}).$$

Isto porém causa outro problema. Note que vemos os operadores de criação e destruição  $a_\mu(\vec{k}), a_\nu^\dagger(\vec{k}')$  como geradores do espaço de estados. Em particular, temos a interpretação de  $a_\mu^\dagger(\vec{k})|0\rangle$  como o estado de 1 partícula - o fóton - com momento  $\hbar\vec{k}$  e polarização  $\mu$ . Note que a normalização deste estado será:

$$\langle 0 | a_\mu(\vec{k}') a_\nu^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle = \langle 0 | [a_\mu(\vec{k}'), a_\nu^\dagger(\vec{k})] | 0 \rangle = -(2\pi)^3 2\omega_k \eta_{\mu\nu} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

o que é perfeitamente aceitável para  $\mu = 1, 2, 3$ , mas resulta em um número negativo para  $\mu = 0$ !

Isto é um desastre pois o espaço de Fock construído a partir de  $|0\rangle$  usando os operadores  $a_\mu^\dagger(\vec{k})$  não é positivo definido e assim a interpretação probabilística da mecânica quântica é inconsistente.

Esquecemos de algo? Sim! Duas coisas, aliás.

1)  $\varphi$  e  $\vec{A}$  não são independentes, satisfazem o calibre de Lorentz:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

2) A imposição do calibre de Lorentz não "fixa o calibre" completamente: ainda podemos fazer transformações onde  $\Lambda$  satisfaz a equação de onda:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda; \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

ainda descrevem os mesmos campos físicos e satisfazem o calibre de Lorentz se  $\Lambda$  satisfizer

$$\nabla^2 \Lambda - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0$$

Isto implica que nem todos os estados gerados a partir da construção de Fock são configurações fisicamente distintas - com valores diferentes para  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$ .

Com a redefinição de  $a_0(\vec{k})$  a condição de Lorentz pode ser escrita como:

$$\omega a_0^\dagger(\vec{k}) - \vec{k} \cdot \vec{a}^\dagger(\vec{k}) = K^\mu a_\mu^\dagger(\vec{k}) = 0; \quad \text{e complexo conjugado.}$$

enquanto a simetria de calibre residual implica que os estados criados por

$$\xi^\mu a_\mu^\dagger(\vec{k}) \quad \text{e} \quad (\xi^\mu + \alpha K^\mu) a_\mu^\dagger(\vec{k}), \quad \text{onde } \alpha \text{ é uma constante}$$

correspondem ao mesmo estado físico.

Do ponto de vista físico, as duas condições acima são necessárias para cancelar duas das polarizações e, talvez, resultar em um espaço de estados com norma positiva definida.

Gostaríamos de definir um subespaço do espaço de Fock composto apenas de estados "físicos" onde cada  $|\text{físico}\rangle$  corresponde a uma configuração fisicamente distinta dos campos  $\vec{E}$  &  $\vec{B}$ .

O primeiro passo seria implementar a condição de calibre  $K^\mu A_\mu(\vec{k}) = 0$ . Em termos dos estados isto implicaria em impor  $\partial_\mu A^\mu |\text{físico}\rangle = 0$ , porém esta condição acaba sendo excessiva. O operador  $\partial_\mu A^\mu$  contém partes de criação e destruição e por razão do primeiro, não é óbvio que,

por exemplo, o estado de vácuo  $|0\rangle$  seja físico. Graças ao ordenamento normal, isso também não é necessário. Se decomposmos o 4-potencial na parte de criação e aniquilação:

$$A_\mu = A_\mu^+(\alpha) + A_\mu^-(\alpha^\dagger); \text{ onde o sinal superescrito denota o sinal de frequência,}$$

É suficiente impor que:

$$\partial^\mu A_\mu^+ |f\u00edsico\rangle = 0$$

De tal forma que

$$\langle f\u00edsico' | \partial^\mu A_\mu | f\u00edsico \rangle = 0$$

Ou seja, é suficiente dizer que o operador  $\partial^\mu A_\mu$  n\u00e3o causa transi\u00e7\u00f5es entre estados f\u00edsicos.

A implica\u00e7\u00e3o disto para o espa\u00e7o de estados deve ser analisada caso a caso. Mas, pelo fato da teoria ser n\u00e3o-interagente, o caso geral pode ser extrapolado a partir do espectro de 1-part\u00edcula. O estado geral de 1-f\u00f3ton \u00e9 escrito:

$$\xi^\mu a_\mu^\dagger(\vec{k}) |0\rangle$$

correspondendo a um estado de 1 f\u00f3ton com n\u00famero de onda  $\vec{k}$  e polariza\u00e7\u00e3o  $\xi^\mu$ . O

operador  $i(\partial^\mu A_\mu^+) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} k^\mu a_\mu(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}$ , atuando no estado acima:

$$\begin{aligned} i(\partial^\mu A_\mu^+) \xi^\mu a_\mu^\dagger(\vec{k}) |0\rangle &= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{k'}} k'^\mu a_\mu(\vec{k}') e^{-i(\omega' t - \vec{k}' \cdot \vec{x})} \xi^\nu a_\nu^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \\ &= -e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} k^\mu \xi_\mu |0\rangle, \end{aligned}$$

O que implica que o estado ser\u00e1 f\u00edsico se  $k^\mu \xi_\mu = 0$ .

A segunda condi\u00e7\u00e3o \u00e9 mais simples de interpretar nesse n\u00edvel, pois pode ser traduzida como:

$$\xi^\mu a_\mu^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \text{ e } (\xi^\mu + \alpha k^\mu) a_\mu^\dagger(\vec{k}) |0\rangle \text{ s\u00e3o estados equivalentes.}$$

Pode-se ver que, ap\u00f3s impostas as condi\u00e7\u00f5es, o resultado final \u00e9 um espectro de estados f\u00edsicos com norma positiva definida. Este \u00e9 o espa\u00e7o de Hilbert do sistema.

Especificamente, escolha uma base de 4-vetores para decompor o vetor de polarização:

$$\xi^\mu = \alpha k^\mu + \beta l^\mu + \alpha_1 e_1^\mu + \alpha_2 e_2^\mu$$

onde  $l^\mu$  é um 4-vetor tipo nulo, tal que  $l^\mu k_\mu = 1$ . Os vetores  $e_1^\mu$  e  $e_2^\mu$  são tipo espaço, com

$e_i^\mu (e_j)_\mu = \delta_{ij}$ , e ortogonais a  $k_\mu$  e  $l_\mu$ . As condições  $k_\mu \xi^\mu = 0$  nos diz que  $\beta = 0$ . A segunda

condição nos permite escolher uma polarização fisicamente equivalente onde  $\alpha = 0$ . Assim, o

espaço de estados de 1-fóton com momento  $\vec{k}$  é escrito como:

$$|1\text{-fóton}, \vec{k}\rangle = (\alpha_1 e_1^\mu + \alpha_2 e_2^\mu) a_\mu^\dagger(\vec{k}) |0\rangle$$

que terá norma  $\delta$ -normalizada se  $|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k}$ . Temos então duas polarizações com um

espaço de Hilbert positivo definido.

Vale notar que a interpretação de  $e_1^\mu$  e  $e_2^\mu$  como vetores de polarização físicos decorre de uma

escolha de calibre, nesse caso o calibre de Lorentz. Uma outra escolha de calibre levaria a

outra base para as polarizações físicas. Pode-se mostrar, usando métodos mais sofisticados,

que o espaço de estados físicos – o espaço de Hilbert da Teoria – é positivo definido.

Estes métodos – quantização BRST – não vai ser visto aqui, por não ser estritamente

necessária.

A hamiltoniana do campo eletromagnético tem a mesma característica dos campos bosônicos:

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \hbar\omega_k (a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2)$$

onde  $a_i^\dagger$  cria um fóton com polarização "i". Imediatamente podemos reconhecer o problema da

invariância de calibre. Como podemos definir uma Hamiltoniana que seja invariante de calibre?

Por enquanto as únicas variáveis invariantes que temos à disposição são os campos elétrico e

magnético. Usando o que aprendemos com o campo bosônico, vamos reescrever os operadores

de criação e destruição em termos dos campos  $\varphi$  e  $\vec{A}$  e os momentos conjugados  $\dot{\varphi}$  e  $\dot{\vec{A}}$

$$a_0(\vec{k}) = c \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (\omega_p \varphi(\vec{x}) - i \dot{\varphi}(\vec{x})); \quad \vec{a}(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} (\omega_p \vec{A}(\vec{x}) - i \dot{\vec{A}}(\vec{x}))$$

no que se segue deve ser entendido que  $\dot{\varphi}, \dot{\vec{A}}$  são os momentos conjugados a  $\varphi, \vec{A}$  e, a priori, independentes destes. Sabemos que a soma das energias para cada componente nos dá uma expressão local:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \hbar \omega_k \left[ -\frac{1}{c^2} a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) + \vec{a}^\dagger(\vec{k}) \cdot \vec{a}(\vec{k}) \right] = \hbar \int d^3x \left( -\dot{\varphi}^2 + \dot{\vec{A}} \cdot \dot{\vec{A}} - c^2 \varphi \nabla^2 \varphi + c^2 \vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A} \right)$$

que, contudo, não é invariante de calibre. Note também o "sinal errado" para o operador número para  $a_0(\vec{k})$ . Isto é uma necessidade advinda da requisição de invariância de Lorentz.

O operador definido acima tem a propriedade de resultar zero em qualquer estado não-físico.

Para definir a hamiltoniana em termos de quantidades invariantes de calibre note que podemos adicionar à quantidade acima qualquer quantidade proporcional a  $\partial^\mu A_\mu$ . Esta quantidade é zero nos estados físicos, e, mediante a adição de um termo específico, podemos recuperar a invariância de calibre. Especificamente:

$$H = \hbar c^2 \int d^3x \left[ -\frac{1}{c^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{A}} \cdot \dot{\vec{A}} + \varphi \nabla^2 \varphi - \vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A} + \left( \frac{1}{c} \dot{\varphi} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right)^2 \right]$$

$$= \int d^3x \left[ \left( -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + \vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right] = \int d^3x \left[ \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right]$$

onde recuperamos a fórmula usual para a energia eletromagnética. Note que agora a hamiltoniana não depende de  $\dot{\varphi}$ , o momento conjugado a  $\varphi$ . Este tipo de situação ocorre em mecânica clássica quando

temos um sistema vinculado. Os vínculos holonômicos são introduzidos via multiplicadores de Lagrange:

variáveis dinâmicas sem dinâmica ou momento associado. O papel de  $\varphi$  acima é justamente esse: a equação de Hamilton associada é:

$$-\frac{\delta H}{\delta \varphi(x)} = \vec{\nabla} \cdot \left( -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \text{ ou seja, a velha lei de Gauss.}$$

Podemos calcular a lagrangeana a partir da expressão original para a hamiltoniana:

$$\begin{aligned}
 L &= 2 \int d^3x \left[ \hbar (-\dot{\psi}^2 + \vec{A} \cdot \vec{A}) - \hbar \int d^3x (-\dot{\psi}^2 + \vec{A} \cdot \vec{A} + c^2 \psi \nabla^2 \psi + c^2 \vec{A} \cdot \nabla^2 \vec{A}) \right] \\
 &= \hbar \int d^3x (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\
 &= \frac{\hbar c^2}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}; \quad \text{onde } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu
 \end{aligned}$$

Finalmente, a função de 2 pontos pode ser calculada diretamente usando a expressão dos campos e a construção do espaço de Fock.

Note que na expressão acima para a Lagrangiana (e para a hamiltoniana) poderia-se adicionar qualquer termo proporcional a  $\partial_\mu A^\mu$ . Em particular, é normal adicionar-se o termo  $\lambda (\partial_\mu A^\mu)^2$  que é quadrático no campo e  $\lambda$  pode ser pensado como um multiplicador de Lagrange cujo papel é introduzir o vínculo de fixação da condição de calibre.

O cálculo da função de 2 pontos é complicado se quisermos manter invariância de calibre. De fato, quantidades como

$$\langle 0 | A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) | 0 \rangle = -\eta_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{-i(\omega(t_1-t_2) - \vec{k} \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2))} = -\eta_{\mu\nu} D^+(x_1 - x_2)$$

e ordenamentos temporais são facilmente calculáveis se não impormos a priori a requisição de estados físicos. Veremos que esta condição na verdade não é necessária pois os estados não-físicos desacoplam dos estados intermediários. Uma interação entre o campo eletromagnético e uma corrente é dada pelo termo de densidade de Lagrangeana da forma  $\mathcal{L}_{int} = -\mathcal{H}_{int} = A_\mu j^\mu$ , onde  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})$  é o 4-vetor densidade de corrente. Os valores esperados relevantes são da forma

$$\int d^4y \langle 0 | \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) A_\mu j^\mu(y) | 0 \rangle; \quad \text{onde } \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \text{ é qualquer operador local.}$$

que é invariante sob qualquer transformação de calibre  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ , se a 4-corrente for conservada:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0; \quad \text{e nesse caso as expressões serão invariantes de calibre mesmo que as}$$

funções de n pontos do campo eletromagnético não o sejam.