

Bósons.

Sistemas bosônicos se comportam segundo a estatística de Bose-Einstein. Para cada estado quântico $|\psi\rangle$, podemos ter um (e apenas um!) estado com n bósons $|\psi, n\rangle$. Se os bósons não interagem, a energia desse estado será nE_ψ . Os operadores de criação e destruição agora satisfazem relações de comutação:

$$[a, a^\dagger] = 1, \text{ e o operador número } N = a^\dagger a \text{ é tal que } [N, a^\dagger] = a^\dagger \text{ e } [N, a] = -a.$$

Note a semelhança com o problema do oscilador harmônico quântico. Lá, como aqui, temos um espectro aditivo: a energia do estado $|\psi, n+m\rangle$ é a soma das energias dos estados $|\psi, n\rangle$ e $|\psi, m\rangle$. Isto é indicativo de um sistema livre. Note também que agora o operador número N pode adquirir qualquer valor inteiro desde 0 (o estado vazio) até ∞ . O estado $|\psi, n\rangle$ pode ser criado a partir do estado vazio pela ação de a^\dagger :

$$|\psi, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |\psi, 0\rangle$$

Note também que podemos definir o estado vazio como aquele que é aniquilado por a :

$$a |\psi, 0\rangle = 0$$

E, para finalizar, o operador hamiltoniano é proporcional ao operador número:

$$H = E_\psi a^\dagger a$$

Note a ausência do termo de ponto zero. Note também que E_ψ é obtido a partir do espectro da hamiltoniana da partícula única (e livre). Isto é facilmente extensível para o caso em que a partícula (ou partículas) interagem com um potencial externo, mas o tratamento tem que ser revisto para sistemas de bósons interagentes.

Sistemas bosônicos aparecem em descrições (supostamente) fundamentais da natureza, como:

- Força eletromagnética
- Forças nucleares forte e fraca, campo de Higgs (quebra espontânea de simetria)
- Gravidade
- Flutuações de certos parâmetros de ordem em matéria condensada (como em supercondutividade)
- Moléculas binárias (desde que a interação do spin nuclear seja baixa).
- Vários tipos de instabilidades em matéria condensada e cosmologia.

Apesar de todos os tipos serem de interesse, neste curso nos atermos ao primeiro, o quarto e o sexto. Algumas ideias de quebra espontânea de simetria também serão exploradas.

O exemplo inicial que consideraremos é o campo escalar livre. Este satisfaz a equação de onda:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \phi = 0$$

e pode descrever (entre outras coisas) ondas de pressão em um sólido. Ele pode ser entendido como um caso particular da equação de Klein-Gordon:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \phi = 0$$

que quantizaremos primeiro. Este sistema é mais simples no sentido de não ter graus de liberdade internos, como o spin, e assim adiaremos a discussão sobre polarizações quando tratarmos do campo eletromagnético. As soluções de uma partícula do campo de Klein-Gordon são expressas como superposições de ondas planas:

$$\phi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E(\vec{p})} \left[a(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} + b^\dagger(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \right] \quad - \text{note normalização}$$

onde podemos tomar $b^\dagger(\vec{p})$ como o complexo conjugado de $a(\vec{p})$, se ϕ for real, ou independente deste, se ϕ for complexo, que é o que faremos aqui. As soluções de onda plana são, segundo de Broglie, soluções com energia $E(\vec{p}) = \pm \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ e momento \vec{p} . Porém também temos no espectro soluções

com energia negativa $-E(\vec{p})$. Gostaríamos de lidar com elas da mesma maneira que o fizemos com o campo fermiônico: supor todos esses estados já ocupados, e interpretar a ausência desses estados (os buracos) como tendo energia positiva. O problema agora é que não há mais o princípio da exclusão para proibir que o vácuo (ou qualquer outro estado) decaia para estes estados de energia negativa. Tudo o que podemos fazer agora é postular a existência desse estado onde a criação de estados de energia negativa é proibida. Como trocamos os papéis de $b(\vec{p})$ e $b^\dagger(\vec{p})$ acima, este "estado fundamental" (o vácuo) satisfará:

$$a(\vec{p})|0\rangle = b(\vec{p})|0\rangle = 0 \text{ para todo o } \vec{p}.$$

E o espaço de Fock é agora gerado por aplicação de $a^\dagger(\vec{p})$ e $b^\dagger(\vec{p})$:

$$|\vec{p}_1, n_1, \vec{p}_2, n_2, \dots; \vec{q}_1, m_1, \vec{q}_2, m_2, \dots\rangle = \frac{[a^\dagger(\vec{p}_1)]^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{[a^\dagger(\vec{p}_2)]^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \dots \frac{[b^\dagger(\vec{q}_1)]^{m_1}}{\sqrt{m_1!}} \frac{[b^\dagger(\vec{q}_2)]^{m_2}}{\sqrt{m_2!}} \dots |0\rangle$$

A normalização será explicada mais abaixo. a e b satisfazem relações canônicas de comutação:

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] = (2\pi\hbar)^3 2E(\vec{p}) \delta(\vec{p}-\vec{p}'); \quad [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] = (2\pi\hbar)^3 2E(\vec{p}) \delta(\vec{p}-\vec{p}');$$

E a hamiltoniana simplesmente a soma das energias de cada estado ocupado:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E(\vec{p})} E(\vec{p}) [a^\dagger(\vec{p})a(\vec{p}) + b^\dagger(\vec{p})b(\vec{p})]$$

Note que, com a definição de $\phi(\vec{x}, t)$ que foi dada acima, recuperamos a ideia de função de onda das soluções de energia positiva:

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t) a^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad - \text{note nova normalização de estados.}$$

Da mesma forma o conjugado ao campo, $\bar{\phi}(\vec{x}, t)$, carrega a informação da função de onda dos estados de energia negativa:

$$\langle 0 | \bar{\phi}(\vec{x}, t) b^\dagger(\vec{p}) | 0 \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad - \text{sinal "correto" para Energia positiva.}$$

A evolução dos operadores de criação e destruição são calculadas a partir das relações de

Comutação com a hamiltoniana.

$$[a^\dagger(\vec{p}), H] = E(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}); \quad [a(\vec{p}), H] = -E(\vec{p}) a(\vec{p}); \quad \text{e as mesmas para } b^\dagger(\vec{p}) \text{ e } b(\vec{p}).$$

de forma que a evolução temporal é a mesma do caso fermiônico.

Calculando as relações de comutação entre $\phi(\vec{x}, t)$ e $\bar{\phi}(\vec{x}', t)$ a tempos iguais:

$$[\phi(\vec{x}, t), \bar{\phi}(\vec{x}', t')]_{t'=t} = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_{p'}} \left\{ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} + [b^\dagger(\vec{p}), b(\vec{p}')] e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} \right\}$$

onde notamos um pequeno problema: mesmo com as relações de comutação cancelando um fator $2E_p$ no denominador, o resultado final não é ainda proporcional à δ de Dirac. Para

resolver este detalhe, calcule o operador $\dot{\bar{\phi}} = \frac{\partial}{\partial t} \bar{\phi}$:

$$\dot{\bar{\phi}}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E_p} \left\{ \frac{i}{\hbar} E_p [a^\dagger(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})} - b(\vec{p}) e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}] \right\} \quad \text{- note o fator extra de } E_p!$$

Agora, fazendo o cálculo:

$$\begin{aligned} [\phi(\vec{x}, t), \dot{\bar{\phi}}(\vec{x}', t')]_{t'=t} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{i}{4\hbar E_p} \left\{ [a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} - [b^\dagger(\vec{p}), b(\vec{p}')] e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x} - \vec{x}')} = \frac{i}{\hbar} \delta(\vec{x} - \vec{x}') \end{aligned}$$

E assim $\hbar^2 \dot{\bar{\phi}}(\vec{x}, t)$ é o momento conjugado a $\phi(\vec{x}, t)$. Agora identificado, podemos calcular a hamiltoniana em termos do campo e seu momento conjugado. Para isto escreva os operadores de criação e destruição em termos de $\phi(\vec{x})$ e $\Pi(\vec{x}) = \hbar^2 \dot{\bar{\phi}}(\vec{x})$ (para $t=0$):

$$a(\vec{p}) = \int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \left(E_p \phi(\vec{x}) + \frac{i}{\hbar} \Pi(\vec{x}) \right); \quad b(\vec{p}) = \int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} \left(E_p \bar{\phi}(\vec{x}) + \frac{i}{\hbar} \Pi(\vec{x}) \right)$$

E expressões análogas para $a^\dagger(\vec{p})$ e $b^\dagger(\vec{p})$. Substituindo na hamiltoniana:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x d^3x' \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E_p} E_p e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x} - \vec{x}')} \left\{ [E_p \bar{\phi}(\vec{x}) - \frac{i}{\hbar} \Pi(\vec{x})] [E_p \phi(\vec{x}') + \frac{i}{\hbar} \Pi(\vec{x}')] + [E_p \phi(\vec{x}) - \frac{i}{\hbar} \Pi(\vec{x})] [E_p \bar{\phi}(\vec{x}') + \frac{i}{\hbar} \Pi(\vec{x}')] \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{\hbar^2} \Pi(\vec{x}) \Pi(\vec{x}) + \bar{\phi}(\vec{x}) (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \phi(\vec{x}) \right\} + H_0 \end{aligned}$$

Com H_0 uma constante (infinita), dada por:

$$H_0 = - \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} 2 \frac{E_p}{2}; \quad \text{cuja interpretação é a mesma do caso fermiônico. Note a diferença de sinal.}$$

Por completudeza, podemos agora calcular a Lagrangeana:

$$L = \int d^3x \left\{ \Pi(\vec{x}, t) \dot{\phi}(\vec{x}, t) + \bar{\Pi}(\vec{x}, t) \dot{\bar{\phi}}(\vec{x}, t) \right\} - H$$

$$= \int d^3x \left\{ \hbar^2 \dot{\bar{\phi}} \dot{\phi} + \hbar^2 c^2 \bar{\phi} \nabla^2 \phi - m^2 c^4 \bar{\phi} \phi \right\} = \hbar^2 c^2 \int d^3x \left\{ (\partial_\mu \bar{\phi})(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \bar{\phi} \phi \right\}$$

Cujas equações de Euler-Lagrange resultam na equação de Klein-Gordon para ϕ e $\bar{\phi}$.

A função de dois pontos para o campo de Klein-Gordon é calculada de maneira análoga ao campo fermiônico:

$$\langle 0 | \phi(\vec{x}, t) \bar{\phi}(\vec{x}', t') | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_{p'}} e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - E't') + \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} \langle 0 | a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}') | 0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E_p} e^{-\frac{i}{\hbar}E(t-t') + \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} = D^+(t-t'; \vec{x}-\vec{x}')$$

Que nos dá a mesma expressão analisada anteriormente. Note que $\langle 0 | \phi(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') | 0 \rangle$ e $\langle 0 | \bar{\phi}(\vec{x}, t) \bar{\phi}(\vec{x}', t') | 0 \rangle$ anulam enquanto $\langle 0 | \bar{\phi}(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') | 0 \rangle$ também nos dá $D^+(t-t', \vec{x}-\vec{x}')$.

Representação dos propagadores e propriedades analíticas.

Vimos que $D^+(t, \vec{x})$ tem uma representação por meio de uma integral no plano complexo:

$$D^+(t, \vec{x}) = \oint_C \frac{dE}{2\pi i} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}}{E^2 - p^2 c^2 - m^2 c^4}; \text{ onde } C \text{ contém o polo } E = +E_p = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \text{ (mas não } E = -E_p!)$$

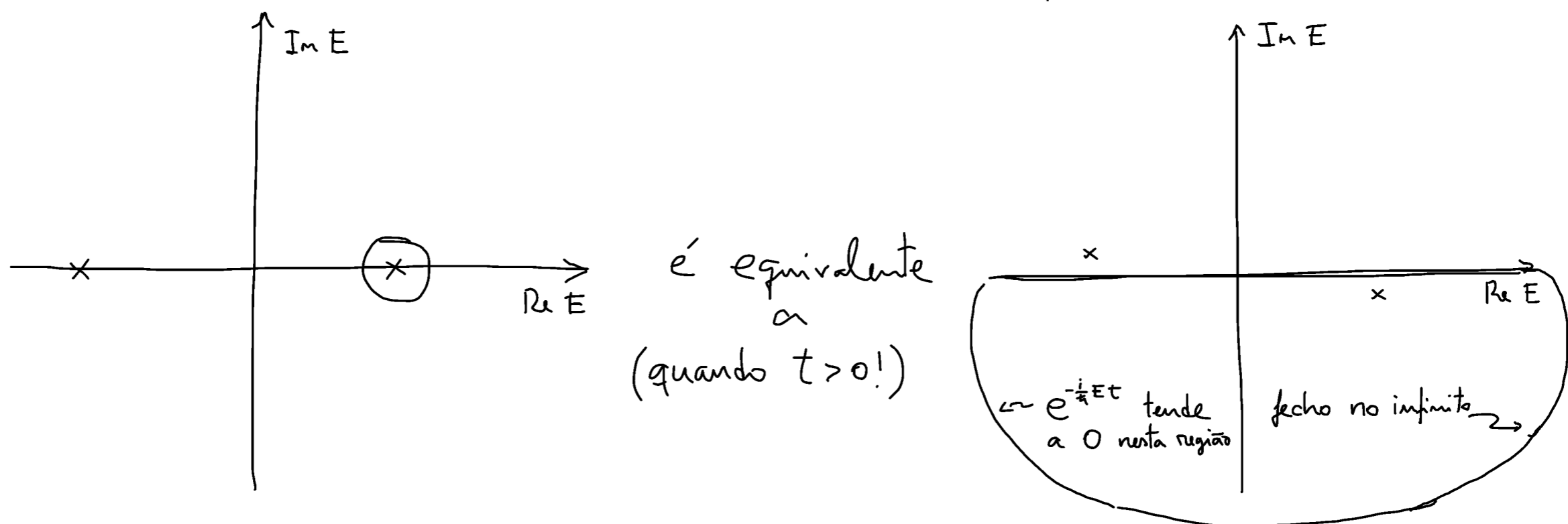
A escolha do contorno C claramente modifica a função D^+ . Podemos definir várias funções de Green - ou propagadores - para a equação de Klein-Gordon. Qual será o propagador correto?

Para obter a resposta, usaremos a seguinte expressão:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + i\epsilon} = P \frac{1}{x} - i\pi \delta(x); \text{ onde } P f(x) \text{ é a parte principal de } f(x).$$

esta expressão pode ser provada a partir de $\log x = \log|x| + i\pi\Theta(-x)$ (com $\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ a função de Heaviside.)

Usando esta expressão, podemos considerar a posição dos pólos de $\frac{1}{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4}$ e a alteração do contorno



Para "deslocar" os pólos da maneira acima, vamos introduzir o pequeno fator de $i\epsilon$ (sempre entendido como pequeno. O limite $\epsilon \rightarrow 0^+$ será implícito em todas as expressões.) O denominador será então modificado para:

$$\frac{1}{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4} \rightarrow \frac{1}{(E - (\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - i\epsilon))(E + (\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - i\epsilon))} = \frac{1}{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4 + i\epsilon}; \text{ note a pequena redefinição de } \epsilon.$$

Além disso, para $t > 0$ o semi-círculo $|E| \rightarrow \infty$, $\text{Im} E < 0$ não contribui para a integral. Podemos então desprezá-lo e definir o contorno de integração como a reta E real. Assim:

$$D^+(t, \vec{x}) \Big|_{t>0} = -i\hbar \int \frac{d^3p dE}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}}{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4 + i\epsilon}$$

Agora o domínio de integração nos permite dizer que $D^+(t, \vec{x})$ é, de fato, uma função de Green para a equação de Klein-Gordon - ao menos para $t > 0$.

Para $t < 0$, a integral sobre a reta E real nos dá a contribuição do pólo $E = -E_p + i\epsilon$. Isto pode ser visto do fato que agora o contorno de integração é fechado pelo semi-plano superior $\text{Im} E > 0$. Assim

$$-i\hbar \int \frac{d^3p dE}{(2\pi\hbar)^4} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}}{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4 + i\epsilon} \Big|_{t<0} = D^-(t, \vec{x}); \text{ onde } D^- \text{ é definido pela contribuição do pólo negativo.}$$

Agora podemos discutir a física dessas expressões. Da definição dos operadores de campo, a função de dois pontos $\langle 0 | \phi(\vec{x}, t) \bar{\phi}(\vec{x}', t') | 0 \rangle$ pode ser entendida como a amplitude de propagação de uma partícula de

\vec{x}' no instante t' até \vec{x} no instante t . Obviamente esta interpretação só faz sentido se $t-t' > 0$.

Da mesma forma, $\langle 0 | \bar{\phi}(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') | 0 \rangle$ tem a interpretação de amplitude de propagação de uma anti-partícula de \vec{x}' no instante t' até \vec{x} no instante t . Note que nesse caso teremos o "sinal errado"

da energia no propagador, com o qual lidaremos da mesma maneira que no campo fermiônico: vamos entender a energia negativa como uma propagação para trás no tempo e interpretar a criação da anti-partícula em t e a destruição em t' . Obviamente essa interpretação só será consistente com as definições de causa e efeito se $t'-t > 0$.

Resumindo, definiremos o propagador causal (ou de Feynman):

$$D_F(\vec{x}, t) = -i\hbar \int \frac{d^3p dE}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{x})}}{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4 + i\epsilon} = \langle 0 | \phi(\vec{x}, t) \bar{\phi}(\vec{x}', t') | 0 \rangle \Theta(t-t') + \langle 0 | \bar{\phi}(\vec{x}, t) \phi(\vec{x}', t') | 0 \rangle \Theta(t'-t)$$

$$= \langle 0 | T \{ \phi(\vec{x}, t) \bar{\phi}(\vec{x}', t') \} | 0 \rangle$$

Ao escolhermos $D_F(\vec{x}, t)$ como propagador da teoria estamos implicitamente assumindo uma consistência nas nossas definições de partícula e anti-partícula. Mais tarde veremos que esta é na verdade uma escolha das definições de causa e efeito. Por essa razão, o propagador causal terá seu papel mesmo na teoria não-relativística.

A relação $\frac{1}{x-i\epsilon} = P \frac{1}{x} + i\pi \delta(x)$ também é útil para relacionar o propagador com propriedades genéricas das excitações do campo. Usando a expressão da função $\delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{x-i\epsilon} - \frac{1}{x+i\epsilon} \right)$, considere o operador

$$\delta(H-E), \text{ onde } H \text{ é a hamiltoniana do setor de 1 partícula.}$$

Este operador é zero se aplicado em um estado ortogonal ao autoestado com energia E . Assim ele pode ser usado para, entre outras coisas, contar o número de estados. Para o caso de espectro contínuo:

$$N = \sum_{\text{estados}} 1 = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} dE \langle \vec{p} | \delta(H-E) | \vec{p} \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dE}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{E-H+i\epsilon} - \frac{1}{E-H-i\epsilon} \right\}$$

$$= \text{Re} \left[-i\hbar \int \frac{d^3p dE}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{E-H+i\epsilon} \right] = \hbar \text{Im} D_F(\vec{x}, t; \vec{x}, t)$$

Mesmo para teorias com espectro positivo e negativo a fórmula continua válida. Note que, no caso do espectro contínuo o resultado é formal: como vimos o propagador em pontos coincidentes diverge: há infinitos estados de 1 partícula. Contudo, a fórmula pode ser usada para descrever como o número (ou densidade) de estados varia com parâmetros externos em H .

Cálculo de valores esperados e Teorema de Wick.

O fato do propagador divergir para pontos coincidentes - o que é devido em última instância ao número infinito de estados - causa certas dificuldades no cálculo de expressões como $\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle$. Estas expressões serão úteis quando formos tratar de interações. Na maioria dos casos estaremos interessados não nos valores dessas expressões, mas sim como elas variam com algum parâmetro - como a constante de acoplamento da interação, ou mesmo como estes valores variam conforme o estado em que o sistema se encontra.

Por isso vamos definir a noção de ordenamento normal: Considere um operador genérico O - não necessariamente local. Suponha que este operador seja um produto arbitrário de operadores $a^\dagger(\vec{p})$, $a(\vec{p})$, $b^\dagger(\vec{p})$, $b(\vec{p})$. O operador ordenado normal $:O:$ é construído a partir de O colocando-se todos os operadores de criação à esquerda e todos os de destruição à direita.

Assim:

$$:O: = a^\dagger(\vec{p}_1) \dots a^\dagger(\vec{p}_n) b^\dagger(\vec{q}_1) \dots b^\dagger(\vec{q}_m) a(\vec{r}_1) \dots a(\vec{r}_k) b(\vec{s}_1) \dots b(\vec{s}_l)$$

Note que, para o caso particular do operador $\phi(\vec{x}, t) \bar{\phi}(\vec{x}', t')$, teremos:

$$:\phi(\vec{x}, t) \bar{\phi}(\vec{x}', t'): = \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_{p'}} \left(:a(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}') : e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - E't') + \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} + :a(\vec{p}) b(\vec{p}') : e^{-\frac{i}{\hbar}(Et + E't') + \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} + \vec{p}'\cdot\vec{x}')} + :b^\dagger(\vec{p}) a^\dagger(\vec{p}') : e^{\frac{i}{\hbar}(Et + E't') - \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} + \vec{p}'\cdot\vec{x}')} + :b^\dagger(\vec{p}) b(\vec{p}') : e^{\frac{i}{\hbar}(Et - E't') - \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} \right)$$

$$\begin{aligned}
:\phi(\vec{x}, t)\bar{\phi}(\vec{x}', t') : &= \phi(\vec{x}, t)\bar{\phi}(\vec{x}', t') - \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E_p} \frac{1}{2E_{p'}} [b(\vec{p}), b^\dagger(\vec{p}')] e^{\frac{i}{\hbar}(Et - E't') - \frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{x} - \vec{p}'\cdot\vec{x}')} \\
&= \phi(\vec{x}, t)\bar{\phi}(\vec{x}', t') - \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2E_p} e^{\frac{i}{\hbar}E(t-t') - \frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')} \\
&= \phi(\vec{x}, t)\bar{\phi}(\vec{x}', t') - \langle 0 | \phi(\vec{x}, t)\bar{\phi}(\vec{x}', t') | 0 \rangle
\end{aligned}$$

Podemos entender então o ordenamento normal do produto de operadores como a variação desse produto entre seu valor em um estado genérico e o estado de vácuo. Note que o segundo termo acima é uma das funções de dois pontos estudadas anteriormente ($D^+(\vec{x}, t)$). Se, ao invés do produto simples dos dois operadores de campo tivéssemos o produto ordenado no tempo, a função de dois pontos que apareceria seria o propagador causal:

$$:T(\phi(\vec{x}, t)\bar{\phi}(\vec{x}', t')) : = : \phi(\vec{x}, t)\bar{\phi}(\vec{x}', t') : = T(\phi(\vec{x}, t)\bar{\phi}(\vec{x}', t')) - D_F(\vec{x} - \vec{x}', t - t')$$

O teorema de Wick é essencialmente um procedimento recursivo para o cálculo de um produto genérico de operadores de campo. Ele provém do fato que, para trocar a ordem de um operador de criação e destruição, temos que usar a relação canônica de comutação:

$$a(\vec{p})a^\dagger(\vec{p}') = a^\dagger(\vec{p}')a(\vec{p}) + (2\pi\hbar)^3 2E_p \delta(\vec{p} - \vec{p}')$$

onde você pode notar que o termo não-ordenado foi substituído pelo termo ordenado normalmente e um termo com um número menor de operadores. Assim:

$$n=2: T(\phi(x_1)\bar{\phi}(x_2)) = : \phi(x_1)\bar{\phi}(x_2) : + D_F(x_1 - x_2); \quad x_1, x_2 \text{ indicando } (\vec{x}_1, t_1) \text{ e } (\vec{x}_2, t_2)$$

$$\begin{aligned}
n=3: T(\phi(x_1)\bar{\phi}(x_2)\phi(x_3)) &= : \phi(x_1)\bar{\phi}(x_2)\phi(x_3) : + \langle 0 | T(\phi(x_1)\bar{\phi}(x_2)) | 0 \rangle : \phi(x_3) : + \langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_3)) | 0 \rangle : \bar{\phi}(x_2) : + \\
&\quad + \langle 0 | T(\bar{\phi}(x_2)\phi(x_3)) | 0 \rangle : \phi(x_1) :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n=4: T(\phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\phi}(x_3)\bar{\phi}(x_4)) &= : \phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\phi}(x_3)\bar{\phi}(x_4) : + : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} \bar{\phi}(x_3)\bar{\phi}(x_4) : + : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\phi}(x_3)} \bar{\phi}(x_4) : + \\
&\quad : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\phi}(x_3)} \bar{\phi}(x_4) : + : \phi(x_1) \overbrace{\phi(x_2)\bar{\phi}(x_3)\bar{\phi}(x_4)} : + : \phi(x_1) \overbrace{\phi(x_2)\bar{\phi}(x_3)} \bar{\phi}(x_4) : + \\
&\quad : \phi(x_1)\phi(x_2) \overbrace{\bar{\phi}(x_3)\bar{\phi}(x_4)} : + : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} \overbrace{\bar{\phi}(x_3)\bar{\phi}(x_4)} : + : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\phi}(x_3)} \bar{\phi}(x_4) : +
\end{aligned}$$

$$+ : \overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)\bar{\phi}(x_3)\bar{\phi}(x_4)} :$$

Onde os traços sobre (e sob!) os operadores denotam a substituição pelo propagador: para o caso do ordenamento normal:

$$\overbrace{\phi(x_1)\bar{\phi}(x_2)} = D_F(x_1 - x_2); \quad \overbrace{\bar{\phi}(x_1)\phi(x_2)} = D_F(x_2 - x_1)$$

Note que "contrações" como $\overbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)}$ e $\overbrace{\bar{\phi}(x_1)\bar{\phi}(x_2)}$ resultam zero e assim não contribuem para o cálculo. A prova será feita para o caso $a(\vec{p}) = b(\vec{p})$ (e assim o campo $\phi(\vec{x})$ é real), com as generalizações — inclusive para o caso fermiônico — sendo consequências diretas.

Por indução:

$n=2$, faça a separação $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x)$, onde ϕ^+ só tem as componentes dependentes de α (frequência positiva), e ϕ^- dependente de α^\dagger .

Suponha $t_1 > t_2$: $T(\phi(x_1)\phi(x_2)) = \phi(x_1)\phi(x_2) = \phi^+(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^+(x_1)\phi^-(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2)$ e $\phi^+\phi^+$, $\phi^-\phi^+$, $\phi^-\phi^-$ já estão ordenados normalmente. Assim

$$T(\phi(x_1)\phi(x_2)) = : \phi(x_1)\phi(x_2) : + [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] = : \phi(x_1)\phi(x_2) : + D^+(x_1 - x_2)$$

Note que $\langle 0 | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | 0 \rangle = D_F(x_1 - x_2) = \begin{cases} [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] & \text{se } t_1 > t_2 \\ [\phi^+(x_2), \phi^-(x_1)] & \text{se } t_2 > t_1 \end{cases}$

Repetindo a conta para $t_2 > t_1$, vemos que o resultado segue. Assim podemos assumir o resultado para $n-1$ inserções do campo e provar para n :

Suponha $t_1 \geq t_2 \geq t_3 \geq \dots \geq t_n$. Assim $T(\phi_1 \dots \phi_n) = \phi_1 \dots \phi_n = \phi_1 T(\phi_2 \dots \phi_n)$; note que $\phi_i = \phi(x_i)$!

E o resultado para $T(\phi_2 \dots \phi_n) = : \phi_2 \dots \phi_n : + \text{termos com 1 contração} + \text{termos com 2 contrações} + \dots$ é assumido.

Agora considere $\phi_1 : \phi_2 \dots \phi_n : = (\phi_1^+ + \phi_1^-) : \phi_2 \dots \phi_n : = \phi_1^+ : \phi_2 \dots \phi_n : + : \phi_1^- \phi_2 \dots \phi_n :$

$$\text{e } \phi_1^+ : \phi_2 \dots \phi_n : = : \phi_1^+ \phi_2 \dots \phi_n : + : [\phi_1^+, \phi_2^-] \phi_3 \dots \phi_n : + : \phi_2^- [\phi_1^+, \phi_3^-] \dots \phi_n : + \dots + : \phi_2 \dots \phi_{n-1} [\phi_1^+, \phi_n^-] :$$

$$= : \phi_2 \dots \phi_n \phi_1^+ : + : D^+(1,2) \phi_3 \dots \phi_n : + \dots + : \phi_2 \dots \phi_{n-1} D_+(1,n) :$$

Então $T(\phi_1 \dots \phi_n) = : \phi_1 \dots \phi_n : +$ 1 contração que envolve ϕ_1 $+$ 1 contração que não envolve ϕ_1 $+$... $+$ 2 contrações envolvendo ϕ_1 $+$...

e assim, ao considerar todos os casos $t_2 \geq t_1 \geq t_3 \dots$, o resultado segue com a contração resultando no propagador de Feynman ao invés de D_+ .