Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

# FIS712 - Teoria Quântica 2

## 3ª Lista de Exercícios – 19/04/2012

---

**Problema 1**: (Itzykson & Zuber 3-1-5) Considere um bóson real livre em um cristal (assim $\int d^3p/(2\pi\hbar)^3 \to 1/V\sum_\kappa$.) Calcule a função de partição grã-canônica do sistema:

$$\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\exp[-\beta(H-\mu N)]$$

representando os operadores $H$ e $N$ em termos dos operadores de criação e destruição. Use as definições de termodinâmica para calcular os valores médios da energia $\bar{E}$ e do número de partículas $\bar{N}$ em termos de uma integral (ou soma) sobre os valores de momento. Para $\mu = 0$, calcule a equação de estado do sistema, relacionando $\bar{E}$ e o volume $V$ com a pressão $p$.

**Problema 2**: (Peskin & Schroeder 4.2) Considere a seguinte lagrangeana, envolvendo dois campos escalares reais $\phi$ e $\Phi$:

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \tfrac{1}{2}M^2\Phi^2 + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \tfrac{1}{2}m^2\phi^2 - \mu\Phi\phi\phi$$

o último termo é uma interação que permite que um estado de $\Phi$ (uma partícula $\Phi$) tenha uma transição para outro estado de $\phi$ (duas partículas $\phi$), desde que $M > 2m$. Assuma que este é o caso e calcule o tempo de meia-vida de $\Phi$ em ordem mais baixa em $\mu$.

**Problema 3**: (Peskin & Schroeder 4.4) Espalhamento de Rutherford. A seção de espalhamento para o espalhamento entre um elétron por um campo couloumbiano de um núcleo pode ser calculada, em ordem mais baixa, sem quantizar o campo eletromagnético. Ao invés, trate o campo eletromagnético como um dado, 4-potencial clássico $A_\mu(x)$. A hamiltoniana de Interação é

$$H_I = \int d^3x\, e : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi(x) : A_\mu,$$

onde $\psi(x)$ é o campo quantizado de Dirac e $:\mathcal{O}:$ denota o ordenamento normal do operador $\mathcal{O}$.

(a) Na aproximação de Born, mostre que a amplitude para espalhamento não-nulo (a matrix $T$) é dada por:

$$\langle p'|iT|p\rangle = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\,\tilde{A}_\mu(p'-p)$$

onde $\tilde{A}_\mu(q)$ é a transformada de Fourier de $A_\mu(x)$.

(b) Se $A_\mu(x)$ é independente do tempo, sua transformada de Fourier contém uma delta de Dirac para a energia. Assim é natural definir:

$$\langle p'|iT|p\rangle = i\mathcal{M}(2\pi\hbar)\delta(\omega_f - \omega_i),$$

onde $\hbar\omega_f$ e $\hbar\omega_i$ são as energias iniciais e finais da partícula. Calcule, a partir da seção de espalhamento:

$$d\sigma = \frac{1}{v_i}\frac{1}{2E_i}\frac{d^3p_f}{(2\pi\hbar)^3}\frac{1}{2E_f}|\mathcal{M}(p_i\to p_f)|^2(2\pi\hbar)\delta(E_f - E_i)$$

(onde $v_i$ é a velocidade da partícula incidente) a fórmula de Rutherford:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 Z^2}{4m^2v^4\,\mathrm{sen}^4(\theta/2)}, \qquad (1)$$

para o caso em que $A^0 = Ze/4\pi r$ é o potencial couloumbiano. Trabalhe no limite não relativístico.