Departamento de Física - Universidade Federal de Pernambuco

# FIS712 - Teoria Quântica 2

## 1ª Lista de Exercícios – 08/03/2012

---

**Problema 1**: Resolva o problema de força Coulombiana para uma partícula carregada de spin zero relativística, regida pela equação de Klein-Gordon:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - e\phi\right)^2 \Phi = \left[c^2\left(\mathsf{P} - \frac{e}{c}\mathsf{A}\right)^2 \Psi + m^2c^4\right]\Phi,$$

com $\phi = -Ze/r$ e $\mathsf{A} = 0$. Escreva explicitamente as autofunções em termos de funções hipergeométricas confluentes. Faça a expansão dos níveis de energia até segunda ordem em $\alpha = e^2/\hbar c$ e compare com a estrutura fina do átomo de hidrogênio.

**Problema 2**: Sejam $\gamma^\mu, \mu = 0,1,2,3$ as matrizes de Dirac, satisfazendo:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I, \qquad \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1).$$

E $I$ é a matriz identidade. Defina as matrizes:

$$\Sigma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \qquad \Gamma^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{3}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho + \text{permutações cíclicas}), \qquad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3.$$

E denote estes elementos por $\Gamma^i$. Considere o espaço vetorial $\wedge V$ gerado por $\Gamma^i$.

(a) Mostre que $\mathrm{Tr}(\Gamma^i) = 0$ para todo $i$, mas que $\mathrm{Tr}((\Gamma^i)^2) \neq 0$.

(b) Mostre que $\langle \Gamma^i, \Gamma^j \rangle = \mathrm{Tr}(\Gamma^i\Gamma^j)$ define um produto escalar não-degenerado em $\wedge V$, com signatura (número de autovalores positivos e negativos) dada por $8$ e $8$, respectivamente.

**Problema 3**: Mostre que o operador de momento angular:

$$J_{\mu\nu} = \frac{\hbar}{2}\Sigma_{\mu\nu} + i\hbar(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$$

e o 4-vetor de Pauli-Lubanski

$$W_\mu = -\frac{1}{2\hbar}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}P^\sigma,$$

comutam com a hamiltoniana de Dirac. Mostre também que, para soluções da equação de Dirac, $W^2 = W_\mu W_\nu \eta^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)m^2c^4$.

**Problema 4**: Escreva as soluções de onda plana da equação de Dirac $u^\pm(p)$ e $v^\pm(p)$ usando a normalização

$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2mc^2\delta^{rs}, \qquad \bar{v}^r(p)v^s(p) = -2mc^2\delta^{rs}$$

e mostre que, nessa normalização, temos

$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0$$

e

$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = c\gamma_\mu p^\mu + mc^2, \qquad \sum_{s=1,2} v^s(p)\bar{v}^s(p) = c\gamma_\mu p^\mu - mc^2.$$

**PROBLEMA 5**: Calcule o vetor de Pauli-Lubanski no referencial de repouso da partícula e mostre que

$$W^0 = 0, \qquad \frac{W^i}{m} = \frac{\hbar}{2}\Sigma^i$$

onde $\Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}$. Assim sendo podemos interpretar $S^i = W^i/m$ como o operador de spin. Para um eixo genérico designado por $n^\mu = (0, n^i)$, com $n_i n^i = 1$, mostre que o operador

$$P(n) = \frac{I + \gamma^5\gamma^\mu n_\mu}{2}$$

projeta nas duas componentes do espinor de Dirac com spin positivo.

**PROBLEMA 6**: Considere a equação de Dirac para massa nula (também chamada de equação de Weyl):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = c\alpha \cdot \mathsf{P}\Psi$$

(a) Escreva a solução da equação de Dirac massiva como $\Psi + \Phi$, onde $\Psi$ é solução da equação para massa nula e ache $\Phi$ como uma série em $m/E$. Mostre assim que a equação acima é o resultado do limite ultra-relativístico da equação de Dirac massiva.

(b) Agora as matrizes $\alpha^i$ podem ser 2x2. Escolha $\alpha^i = \sigma^i$ as matrizes de Pauli. Considere uma particula sem massa carregada na presença de um campo magnético homogêneo na direção $\hat{z}$. Considere a partícula em um autoestado de $p_z = m\hbar$, e mostre que no estado fundamental a densidade eletrônica é dada por

$$j^0 = -\frac{eB}{4\pi}\frac{m}{|m|}$$

[Sugestão: use o calibre $A_2 = Bx$. Métodos similares aos usados para achar a densidade eletrônica no caso não relativístico serão necessários.]