MECÂNICA LI

3º E.E. – Gabarito

Problema 1:

a) Verdadeiro. estas direções são chamadas eixos principais de rotação. É decorrência direta do tensor de inércia, que relaciona a velocidade angular com o momento angular ser simétrico

b) Falso. o corpo rígido com um ponto fixo vai, em geral, apresentar 3 tipos de movimento. rotação, nutação e precessão. Isso decorre do fato que temos 3 ângulos de Euler.

c) Falso: um elipsóide de revolução vai, necessariamente, ter um de seus semi-eixos menor do que o raio da esfera com o mesmo volume. A rotação em um eixo perpendicular a este terá um momento de inércia menor que aquele da esfera

d) Verdadeiro: a energia de rotação é $E = \frac{1}{2}\vec{\omega}\,(\mathbb{I}\vec{\omega})$, ou $\frac{1}{2}(\mathbb{I}^{-1}\vec{J})\cdot\vec{J}$, em termos do momento angular. Assim, quando o momento de inércia aumenta, a energia diminui.

e) Verdadeiro: esse é exatamente o conteúdo do Teorema de Nöther.

Problema 2:

Escolhendo a origem do sistema de coordenadas como o centro de massa do cubo, calculamos as componentes diagonais de $\mathbb{I}$:

$$I_{xx} = \frac{M}{L^3}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \left(x^2+y^2+z^2-x^2\right) = \frac{M}{L^2}\left(2\,\frac{L}{3}\,\frac{L^3}{4}\right)$$

$$= \frac{ML^2}{\;} = I_{yy} = I_{zz} \qquad \Longrightarrow$$

E as componentes fora da diagonal:

$$I_{xy} = \frac{M}{L^3}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dy \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \left(-xy\right) = \frac{M}{L^2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left(-x\frac{y^2}{2}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\right)$$

$$= 0 = I_{xz} = I_{yz}$$

Assim o tensor de inércia é:

$$I = \frac{ML^2}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e os eixos principais de rotação são quaisquer 3 vetores ortogonais, por exemplo:

$$\hat{e}_1 = \hat{x} \quad ; \quad \hat{e}_2 = \hat{y} \quad ; \quad \hat{e}_3 = \hat{z}$$

E os momentos de inércia sempre igual a $\frac{ML^2}{6}$.

Problema 3

a) A função Lagrangeana é a energia cinética menos a potencial:

$$L = \frac{Mv^2}{2} - U = \frac{M}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2\right) - Mgr\cos\theta$$

Usando o fato que a partícula está presa no aro $(r = R)$ e este gira com velocidade angular constante $\dot{\phi} = \omega$, temos

$$L = \frac{MR^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\omega^2\right) - MgR\cos\theta$$

b) O único grau de liberdade do sistema agora é θ Escrevendo a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} \Rightarrow MR^2\ddot{\theta} = MR^2\omega^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + MgR\operatorname{sen}\theta$$

c) A posição de equilíbrio é aquela em que o lado direito da equação acima se anula:

$$M R^2 \omega^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = - m g R \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{g}{R\omega^2}$$