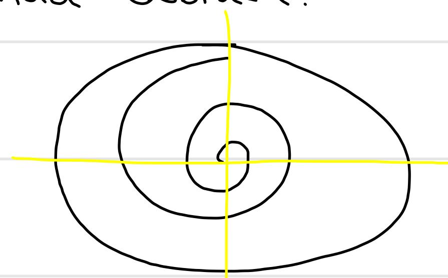
MECÂNICA LI

2º E.E. – Gabarito

Problema 1:

a) Verdadeiro: o potencial αx^3 contribui com um termo $3\alpha x^2$ nas equações de movimento. Substituindo a solução $x_0(t) = x_0 \cos\omega t$ no termo e usando a identidade $\cos^2\omega t = \frac{1+\cos 2\omega t}{2}$, vemos que o termo forçado tem a frequência dobrada.

b) Falso: esta é uma "pegadinha". Contra-exemplo:



a espiral está no interior, mas não é fechada.

c) Falso: ressonância só acontece quando a frequência da força motriz for próxima da frequência natural do sistema. Fica assim mais difícil de acontecer se a frequência natural se altera com a amplitude.

d) Verdadeiro. A razão entre a área e o tempo é a velocidade aureolar e é proporcional ao momento angular.

e) Falso: Todo sistema de força central tem órbitas circulares, mas só o potencial de Kepler e o oscilador harmônico isotrópico têm órbitas fechadas, em geral.

Problema 2:

a) A partir do "chute": $z_1 = A_1 e^{i\omega t}$ e $z_2 = A_2 e^{2i\omega t}$, temos, por substituição:

$$-\omega^2 A_1 + 2i\beta\omega A_1 + \omega_0^2 A_1 = f_1 \Longrightarrow A_1 = \frac{f_1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega}$$ e

$$-4\omega^2 A_1 + 4i\beta\omega A_1 + \omega_0^2 A_1 = f_2 \Longrightarrow A_2 = \frac{f_2}{\omega_0^2 - 4\omega^2 + 4i\beta\omega}$$

Assim a solução é: $\Longrightarrow$

$$x(t) = Re\left[\frac{f_1 e^{i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2+2i\beta\omega}\right] + Re\left[\frac{f_2 e^{2i\omega t}}{\omega_0^2-4\omega^2+4i\beta\omega}\right] = f_1\frac{e^{i\omega t+\delta_1}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}} + f_2\frac{e^{2i\omega t+\delta_2}}{\sqrt{(\omega_0^2-4\omega^2)^2+16\beta^2\omega^2}}$$

b) Na frequência de ressonância, os denominadores são máximos: $\omega=\omega_0$. Substituindo, para $f_1=f_2$

$$\text{razão} = \sqrt{\frac{(\omega_0^2-\omega_0^2)^2+4\beta^2\omega_0^2}{(\omega_0-4\omega_0^2)^2+16\beta^2\omega_0^2}} = \frac{2\beta\omega_0}{\sqrt{9\omega_0^2+16\beta^2\omega_0^2}}$$

Nota. também considerei correto o uso de $\omega_R^2=\omega_0^2-2\beta^2$

Problema 3:

a) Da figura, o raio mínimo $b=r_☿+h$. Para encontrarmos a podemos usar a equação da órbita, onde $\frac{1}{a}=\frac{mk}{\ell^2}(1+\epsilon)$ e $\frac{1}{b}=\frac{mk}{\ell^2}(1-\epsilon)$ donde $\frac{1}{a}=\frac{2mk}{\ell^2}-\frac{1}{b}$. Precisamos agora achar ℓ.

Considere a 2ª lei onde $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{\ell}{2m}$ é uma constante. Integrando no período temos a área da elipse donde $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}=\frac{\pi ab}{T}$. Então $\ell=\frac{2\pi ab}{T}m$ e $\frac{1}{a}=\frac{kT^2}{2\pi^2 ma^2b^2}-\frac{1}{b}$. Resolvendo a equação quadrática:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{kT^2}{2\pi^2 ma^2b^2}}$$

b) A partir de a e b, podemos calcular a energia da órbita $\frac{1}{ab}=\frac{m^2k^2}{\ell^4}(1-\epsilon^2)=\frac{m^2k^2}{\ell^4}\left(-\frac{2\ell^2E}{mk^2}\right)=-\frac{2mE}{\ell^2}$; ou seja $E=-\frac{\ell^2}{2mab}=-\frac{\pi\ell}{T}$. Dividindo esta energia por 15 min nos dará a potência necessária.