



FI-206 – Mecânica L1

1ª Lista de Exercícios - Entrega dia 03/05/2011

Problema 1: (MT:1-9)¹ Para os dois vetores

$$\mathbf{A} = \hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}, \quad \mathbf{B} = -2\hat{x} + 3\hat{y} + \hat{z} \quad (1)$$

Ache:

- (a) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ e $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$. (c) O ângulo entre \mathbf{A} e \mathbf{B} . (e) $(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{B})$.
(b) A componente de \mathbf{B} em \mathbf{A} (d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

Problema 2: (MT:1-13) Se \mathbf{X} é um vetor desconhecido satisfazendo as seguintes relações com vetores conhecidos \mathbf{A} e \mathbf{B} e o escalar ϕ :

$$\mathbf{A} \times \mathbf{X} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \phi \quad (2)$$

Expresse \mathbf{X} em termos de \mathbf{A} , \mathbf{B} , ϕ e a magnitude de \mathbf{A} .

Problema 3: (MT:1-22,1-27) Alguns exercícios sobre cálculo vetorial:

- (a) Avalie a soma $\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk}$ (que contém 81 termos) considerando o resultado para todas as combinações possíveis de i, j, l, m ; isto é: (i) $i = j$, (ii) $i = l$, (iii) $i = m$, (iv) $j = l$, (v) $j = m$, (vi) $l = m$, (vii) $i \neq l$ ou m , (viii) $j \neq l$ ou m . Mostre que

$$\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$$

e use este resultado para provar

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}.$$

- (b) Mostre que:

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})] = r^2 \mathbf{a} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (v^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}$$

onde \mathbf{r} , $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$ são funções de t apenas.

Problema 4: (MT:1-28,1-31) Mostre que

$$(a) \nabla r^n = nr^{n-2}\mathbf{r}, \quad (b) \nabla(\ln|r|) = \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad (c) \nabla f(r) = \frac{\mathbf{r}}{r} \frac{df}{dr}, \quad (d) \nabla^2(\ln|r|) = \frac{1}{r^2}.$$

Problema 5: Uma partícula percorre uma trajetória no plano dada por $\mathbf{r} = e^{at} \cos t \mathbf{i} + e^{at} \sin t \mathbf{j}$

- (a) Calcule os vetores velocidade e aceleração.

¹Atenção: problemas entre parênteses referem-se à quarta edição do livro-texto.

- (b) Use a interpretação do produto interno para decompor a aceleração em uma componente paralela à velocidade, \mathbf{a}_{\parallel} , e outra perpendicular à velocidade, \mathbf{a}_{\perp} .
- (c) Qual o raio do maior círculo tangente à trajetória da partícula no instante t ?

Problema 6: (MT:2-38) A velocidade de uma partícula de massa m varia com a distância x como $v(x) = \alpha x^{-n}$. Assuma $v(x=0) = 0$ em $t = 0$.

- (a) Ache a força $F(x)$ responsável.
- (b) Determine $x(t)$ e
- (c) Determine $F(t)$.

Problema 7: (Berk:5-12) *A energia potencial de um par de molas* Duas molas, de comprimento natural a cada, e constante elástica C , estão fixas nos pontos $(-a,0)$ e $(+a,0)$ e ligadas pelas outras extremidades. No que se segue, suponha que ambas podem contrair-se e esticar-se sem fletir.

- (a) Mostre que a energia potencial do sistema para um deslocamento das extremidades unidas até (x,y) é:

$$U = \frac{C}{2} \left\{ [(x+a)^2 + y^2]^{1/2} - a \right\}^2 + \frac{C}{2} \left\{ [(x-a)^2 + y^2]^{1/2} - a \right\}^2$$

- (b) A energia potencial depende tanto de x quanto de y , devemos, portanto, usar a derivação parcial para obter as forças relevantes. [...] Ache a componente F_x da força e mostre que $F_x = 0$ para $\mathbf{r} = 0$.
- (c) Ache F_y para $x = 0$. Verifique cuidadosamente os sinais para certificar-se que a resposta tem sentido.
- (d) Esboce um gráfico da energia potencial como função de \mathbf{r} , no plano xy , e encontre a posição de equilíbrio.

Problema 8: Dado o campo de força

$$\mathbf{F} = (y^2 - x^2)\hat{\mathbf{x}} - 3xy\hat{\mathbf{y}}$$

calcule a integral de linha entre os pontos $(0,0)$ e (x_0,y_0) , ao longo da trajetória formada pelas duas retas: $(0,0)$ a $(x_0,0)$ e $(x_0,0)$ a (x_0,y_0) . Compare o resultado com o que seria obtido tomando os outros dois lados do retângulo como o caminho de integração. É conservativa esta força?