Introdução à Relatividade Geral

1º Exercício Escolar - 13/10/2010

Questão 1: O tensor energia-momento de um fluido isotrópico e homogêneo é dado por:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b) \tag{1}$$

onde ρ é sua densidade de energia, P sua pressão e u^a a 4-velocidade normalizada do fluido. η_{ab} é a métrica de Minkowski.

(a) Escreva as componentes do tensor em um sistema de coordenadas em que a 4-velocidade normalizada seja dada por $u^\mu = (\gamma, \gamma \mathbf{v})$.

(b) Assuma que o fluido satisfaz uma equação de estado $P = w\rho$, com w constante. Ache os valores de w para os quais a *condição forte de energia*

$$T_{ab} u^a u^b \geq -\frac{1}{2} T \tag{2}$$

é satisfeita. $T = T^a_a = T^{ab}\eta_{ab}$ é o traço de T_{ab}.

(c) Mostre que, se um observador segue uma curva integral de um vetor de Killing v^a, então a corrente de fluido observada por ele $J_a = T_{ab}v^b$ tem 4-divergente nulo.

Questão 2: Considere a variedade bidimensional com métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \tag{3}$$

Ache a equação diferencial da órbita (isto é, $r(t)$) para geodésicas do tipo nulo, e esboce as soluções no plano $r - t$ para $f(r) = 1 - \frac{r^2}{\ell^2}$. Mostre que a curva $f(r) = 0$ não pode ser atravessada por estas geodésicas com t finito.

Questão 3: Considere um campo vetorial geodésico normalizado:

$$\xi^b \nabla_b \xi^a = 0, \qquad \xi_b \xi^b = -1. \tag{4}$$

Mostre que $h^{ab} = g^{ab} + \xi^a \xi^b$ é um projetor no espaço ortogonal a ξ^a.

Mostre a *Equação de Raychaudhuri* para o fator de expansão $\theta = 1/3 h^{ab} \nabla_a \xi_b$:

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} + \omega_{ab}\omega^{ab} - R_{cd}\xi^c \xi^d. \tag{5}$$

onde τ é o parâmetro afim associado a ξ^a e σ_{ab} e ω_{ab} são definidos como a parte simétrica sem traço e antissimétrica de $\nabla_a \xi_b$:

$$\sigma_{ab} = \nabla_{(a}\xi_{b)} - \frac{1}{3}\theta h_{ab}, \qquad \omega_{ab} = \nabla_{[a}\xi_{b]}.$$