



# Introdução à Relatividade Geral

Notas de aula por Bruno Carneiro da Cunha

## Parte 6: Cosmologia Relativística

### Homogeneidade e Isotropia do Universo

De especial interesse para nós vão ser as soluções da equação de Einstein que possuem as propriedades de homogeneidade e isotropia. Vamos tentar traduzir estas propriedades em termos da métrica  $g_{ab}$ .

Considere um campo vetorial  $T^a$  que seja, a cada ponto do espaço-tempo, tangente à trajetória de um observador em queda livre que passe por aquele ponto. Como  $T^a$  é uma velocidade, podemos usar a parametrização de tempo próprio para normalizá-lo:  $T^a T_a = -1$ . Ao diferenciarmos esta equação notamos que o tensor  $\nabla_a T^b$  é não apenas tangencial ao espaço-tempo, mas também ortogonal à  $T^b$ , pois pela equação da geodésica  $T^a \nabla_a T^b = 0$ .

Para obter uma interpretação física de  $\nabla_a T^b$  e sua importância no estudo das soluções das equações de Einstein que procuramos, vamos introduzir um sistema de base coordenadas de vetores, *i. e.* uma base de vetores  $X_i^a$  que comutem com  $T^a$ . Como vimos, o transporte paralelo de  $X_i^a$  ao longo das geodésicas é dado por

$$T^a \nabla_a X_i^b = X_i^b \nabla_b T^a, \quad (1)$$

onde o lado direito é obtido por meio de  $[X_i, T] = 0$ . Assim, podemos pensar em  $\nabla_a T^b$  como o *operador linear* que implementa o transporte paralelo infinitesimal ao longo das trajetórias dos observadores. O fato de  $\nabla_a T^b$  ser ortogonal a  $T^b$  nos dois índices nos assegura que esta transformação linear é naturalmente reduzida ao subespaço ortogonal a  $T^a$ . Podemos decompor o operador em três partes, a saber:

$$\nabla_a T_b = \theta h_{ab} + \omega_{ab} + \sigma_{ab} \quad (2)$$

Onde  $h_{ab} = g_{ab} + T_a T_b$  é a projeção da métrica no subespaço ortogonal a  $T^a$ , e  $\omega_{ab} = \omega_{[ab]}$  e  $\sigma_{ab} = \sigma_{(ab)}$  são respectivamente as componentes antisimétricas e simétricas de  $\nabla_a T_b$ . Para definir a função  $\theta$  unicamente, iremos requerer que o traço de  $\sigma_{ab}$  seja nulo, ou  $\sigma_{ab} g^{ab} = \sigma_{ab} h^{ab} = 0$ .

Vamos argumentar agora que, em um espaço homogêneo e isotrópico, a única parcela não nula de (2) é o traço  $\theta$ . De fato, seu efeito nos vetores  $X_i^a$  é apenas dilatá-los, o que mantém as propriedades de homogeneidade, se  $\theta$  não depender da posição espacial. Os tensores  $\omega_{ab}$  e  $\sigma_{ab}$ , por outro lado, têm uma ação incompatível com estas propriedades, como podemos ver na Figura 1.

Como se vê no curso de mecânica, a partir de um tensor anti-simétrico, podemos associar uma rotação no espaço. Desta forma, se  $\sigma_{ab}$  estiver presente na expansão (2), o seu efeito será o de girar a base de vetores de tal forma que um observador separado por um ponto  $X_i^a$  sofrerá uma rotação. Obviamente não podemos fazer esta rotação constante por todo o espaço, de forma que  $\omega_{ab} \neq 0$  é incompatível com o critério de homogeneidade.

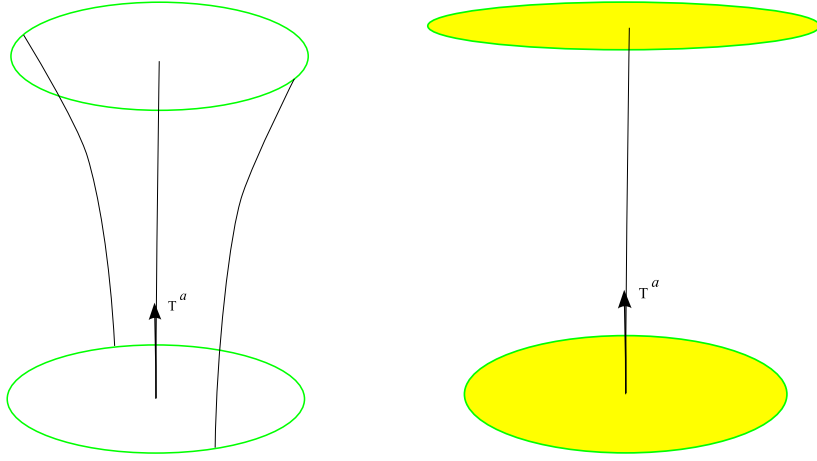


Figura 1: A interpretação geométrica de  $\omega_{ab}$  e  $\sigma_{ab}$ , respectivamente à esquerda e à direita. Note que  $\omega_{ab}$  apenas roda as geodésicas próximas, enquanto  $\sigma_{ab}$  não altera a área do círculo.

Da mesma forma, o efeito de  $\sigma_{ab}$  é gerar um cisalhamento no espaço de forma que os vetores  $X_i^a$  sejam contraídos ou dilatados de forma a manter o volume constante. Isto é obviamente incompatível com o critério de isotropia.

Assim temos, para um espaço homogêneo e isotrópico:

$$\nabla_a T_b = \theta(t)(g_{ab} + T_a T_b) \quad (3)$$

com o **fator de expansão**,  $\theta(t)$  constante pelo espaço, embora possa obviamente mudar com o tempo.

Pode-se ver que  $h_{ab}$  definido acima gera uma métrica do espaço ortogonal a  $T^a$ . Esta métrica é chamada de **métrica induzida** e tem assinatura  $(+, +, +)$ , ou seja, é **riemanniana**. O espaço ortogonal a  $T^a$  também é chamado, por motivos óbvios de **seção espacial** do espaço-tempo. Em espaços homogêneos e isotrópicos, temos que restringir esta métrica riemanniana de forma que, por exemplo, sua curvatura seja constante. Isto nos deixa três opções para o elemento de linha associado a  $h_{ab}$ :

$\bar{R} = 0$ : Neste caso podemos tomar o espaço como euclidiano:

$$d\bar{s}_0^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (4)$$

$\bar{R} < 0$ : Neste caso o espaço é dito *hiperbólico*:

$$d\bar{s}_-^2 = a^2(t)(d\chi^2 + \cosh^2 \chi d\theta^2 + \cosh^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5)$$

A curvatura aqui é  $\bar{R} = -6/a^2(t)$ .

$\bar{R} > 0$ : Neste caso o espaço é dito *esférico*:

$$d\bar{s}_+^2 = a^2(t)(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi d\psi^2), \quad (6)$$

e o elemento de linha euclidiano em coordenadas esféricas. A curvatura é  $\bar{R} = +6/a^2(t)$ .

Nos casos acima, a curvatura  $\bar{R}$  associada aos elementos de linha do espaço  $d\bar{s}_{0,\pm}^2$  é chamada de **curvatura extrínseca**, ou **curvatura tri-dimensional**. Espaços como os descritos acima

são chamados **maximalmente simétricos**. Seu tensor de Riemann associado aos elementos de linha acima é dado por:

$$\bar{R}_{abcd} = \frac{\bar{R}}{6}(h_{ac}h_{bd} - h_{ad}h_{bc}) \quad (7)$$

Onde  $\bar{R}$  é o escalar de curvatura, dado acima para os casos de interesse.

Note que, como  $a(t)$  é uma função do tempo apenas, não depende das coordenadas espaciais e pode para efeitos dos argumentos acima ser considerada uma constante. No que se segue vamos fazer  $d\bar{s}_{0,\pm}^2 = a^2(t)d\Sigma_{0,\pm}^2$ .

De posse destes fatos, vemos que a métrica de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico tem de ser da forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma_{0,\pm}^2 \quad (8)$$

onde o **fator de escala**  $a(t)$  está relacionado com o fator de expansão por:

$$\theta(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}. \quad (9)$$

As métricas do tipo (8) são chamadas de **métricas de Friedmann-Robertson-Walker**, ou métricas FRW, em homenagem aos seus descobridores.

## Cosmologias de Friedmann-Robertson-Walker

A pergunta natural que se põe a esta altura é *qual distribuição de matéria devemos ter para que a solução seja da forma proposta por FRW?* Podemos, ao invés de simplesmente calcular o tensor de Einstein para (8), usar de dois simples argumentos heurísticos. O primeiro restringe a forma do tensor de energia-momento a ser diagonal, isto é, os componentes  $T_{ab}$  têm de se anular quando  $a \neq b$ . O raciocínio por trás disso é o mesmo que usamos para  $\omega_{ab}$  acima: um influxo de matéria mudando de direção, inclusive entre direções espaciais e a direção temporal faria com que o sistema adquirisse uma rotação (isto é melhor visto quando as direções envolvidas são espaciais), violando o princípio de homogeneidade.

O segundo argumento tem a ver com a isotropia, e diz simplesmente que as componentes espaciais-espaciais de  $T$  têm de ser iguais. Novamente, mais estresse na direção  $z$  que na direção  $y$ , por exemplo, violaria a isotropia do espaço, e desta forma a restrição de  $T$  nas componentes espaciais tem de ser proporcional a  $h_{ab}$ , com a constante de proporcionalidade sendo uma função do tempo apenas. Assim,  $T$  terá a forma

$$T_{ab} = \rho T_a T_b + P(g_{ab} + T_a T_b) \quad (10)$$

com  $\rho$  e  $P$  funções do tempo. Em mecânica dos fluidos, um tensor  $T_{ab}$  desta forma pode ser encontrado desde que o fluido em questão seja **perfeito**, em configuração isotrópica e homogênea. Por simplicidade, nos referiremos a (10) como o tensor de energia-momento de um **fluido perfeito**. Neste caso as funções  $\rho$  e  $P$  são, respectivamente, a **densidade de energia** e **pressão** do fluido.

Nós sabemos que, mesmo em um contexto cosmológico, a pressão e a densidade de energia do universo são funções que devem obedecer a certas requisições físicas. Sabemos, por exemplo que a densidade de energia não pode ser negativa. Assim, a questão que se põe é o que se pode dizer sobre a evolução do espaço-tempo a partir de prescrições básicas sobre o tensor de energia-momento? Surpreendentemente, pode-se dizer bastante com apenas restrições simples e naturais.

Vamos começar calculando a segunda derivada de  $T^a$ :

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b T_c &= \nabla_a (\theta (g_{bc} + T_b T_c)) \\ &= -T_a \dot{\theta} (g_{bc} + T_b T_c) + \theta ((\nabla_a T_b) T_c + T_b \nabla_a T_c) \\ &= -T_a \dot{\theta} (g_{bc} + T_b T_c) + \theta^2 (g_{ab} T_c + g_{ac} T_b + 2T_a T_b T_c)\end{aligned}$$

onde na segunda linha usamos que  $\theta$  é uma função apenas do tempo, e assim  $\nabla_a \theta = -T_a T^b \nabla_b \theta$ . Anti-simetrizando em relação a  $a$  e  $b$ , e usando a definição do tensor de Riemann, obtemos:

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} T_c \equiv R_{abc}{}^d T_d = -(\dot{\theta} + \theta^2) T_{[a} g_{b]c}. \quad (11)$$

Contraindo a equação acima com  $g^{ac}$ , e usando as propriedades do tensor de Riemann, obtemos:

$$R_{bd} T^d = -(\dot{\theta} + \theta^2) (T_b - 4T_b). \quad (12)$$

E finalmente, usando as equações de Einstein<sup>1</sup>

$$R_{bd} = 8\pi G_N (T_{bd} - \frac{1}{2} g_{bd} T) \quad (13)$$

onde  $T = g_{ab} T^{ab}$  é o traço do tensor energia-momento, obtemos a **Equação de Raychaudhuri**:

$$\dot{\theta} + \theta^2 = -\frac{1}{3} T^b R_{bd} T^d = -\frac{8\pi G_N}{3} \left( T^b T_{bd} T^d + \frac{1}{2} T \right). \quad (14)$$

Note que, no sistema de coordenadas em que  $T^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = (1, 0, 0, 0)$ ,  $T^b T_{bd} T^d$  é a componente  $t-t$  puramente temporal do tensor energia momento. Em termos do tensor energia-momento do fluido perfeito (10),  $T^b T_{bd} T^d = \rho$  é a densidade de energia. Por outro lado, o traço do tensor energia momento também pode ser facilmente calculado de (10):

$$T = g^{ab} (\rho T_a T_b + P (g_{ab} + T_a T_b)) = -\rho + 3P \quad (15)$$

Assim, se  $T^a T_{ab} T^b + \frac{1}{2} T \geq 0$ , ou seja, para um fluido perfeito,

$$\rho + 3P \geq 0 \quad (16)$$

dizemos que a distribuição de matéria-energia satisfaz a **condição forte de energia**.

## O Modelo Padrão

A verificação experimental por E. Hubble que  $\theta > 0$ , ou seja, o universo está em expansão, marcou não apenas uma verificação experimental da Relatividade Geral como também a migração da Cosmologia dos estudos teológicos para os estudos científicos. Pela primeira vez um modelo sobre a criação do universo que conhecemos poderia ser testado experimentalmente. Não é o escopo destas notas cobrir a discussão que se seguiu, em ambas as frentes teológicas e físicas, sobre a existência de um “momento de criação”. É suficiente dizer, a este ponto, que a questão sobre se o Big Bang representa a gênese de nosso universo está respondida ao menos desde a descoberta da Radiação Cosmológica de Fundo, que iremos tratar na próxima aula.

Vamos aproveitar esta discussão para tecer comentários gerais sobre a estrutura causal do universo. Por estrutura causal entendemos, por exemplo, a determinação de quais pontos

<sup>1</sup>A equação é obtida contraindo a equação de Einstein com  $g^{ac}$ , obtendo  $R = -8\pi G_N T$ .

estão no passado de um ponto dado, ou seja, qual é o **passado causal** de um dado ponto. Começemos da métrica FRW para seções espaciais euclidianas:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (17)$$

Podemos, ao invés de tratar com o tempo cosmológico  $t$ , introduzir uma nova coordenada temporal  $\eta$ , em termos da qual a métrica será dada por:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (18)$$

Fica óbvio então que a relação entre  $t$  e  $\eta$  é dada por:

$$d\eta = \pm \frac{dt}{a(t)}, \quad (19)$$

onde o sinal é costumeiramente escolhido de forma ao aumento de  $\eta$  representar o futuro.

A utilidade em se escrever a métrica como (18) está no ponto que a multiplicação do elemento de linha pela função  $a(\eta)$  não altera os cones de luz. De fato, os cones de luz de (18) viajam por linhas em que  $ds^2 = 0$ , e podem assim ser calculados na métrica:

$$d\tilde{s}^2 = -d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (20)$$

Esta métrica por outro lado, é a boa e velha métrica de Minkowski, cujos cones de luz são bem conhecidos. Transportando então os cones de luz para a métrica (18), saberemos qual é a estrutura causal da métrica FRW em questão. A relação que liga  $ds^2$  a  $d\tilde{s}^2$  é chamada de **transformação conforme** e  $\eta$  é correspondentemente chamado de **tempo conforme**. O argumento se aplica da mesma forma para seções espaciais hiperbólicas e esféricas, com certas peculiaridades neste último caso que, infelizmente não teremos tempo de cobrir.

Pelo que vimos acima, a estrutura causal parece estar determinada para o caso (17). Contudo, há uma sutileza a esclarecer: A transformação (19) é ou não bem definida? O passo primeiro parece ser integrar a equação:

$$\eta = \int^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (21)$$

E testar sua convergência. Tudo parece certo se  $a(t)$  não se anular. Mas, se a integral acima divergir a  $\pm\infty$  para algum valor de  $t$  no qual  $a(t) \rightarrow 0$ , então  $\eta$  poderá tomar qualquer valor real, e neste caso a métrica (18) será conforme a *todo* o espaço-tempo de Minkowski. Se, por outro lado, a integral convergir para um valor  $\eta_0$  mesmo se  $a(t) \rightarrow 0$  a métrica será conforme a *uma parte* do espaço de Minkowski, e neste caso sua estrutura causal será mais interessante.

Vamos tratar de um exemplo concreto. Tome  $a(t) \propto t^\alpha$ , com  $\alpha$  uma constante. Neste caso temos um ponto em que  $a(t) \rightarrow 0$ , mas o que acontecerá com a estrutura causal do espaço-tempo? Introduzamos o tempo conforme  $\eta$ , integrando (21):

$$\eta = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (22)$$

Note que o ponto problemático é  $t \rightarrow 0$ . Se  $\alpha \geq 0$ , então  $a(t) \rightarrow 0$  neste ponto. Se  $\alpha > 1$ ,  $\eta$  divergirá, então a estrutura causal será equivalente ao do espaço-tempo de Minkowski. O que aparentava ser um problema, o ponto onde  $a(t)$  se anulava, pode ser visto como apenas um artefato introduzido pelo sistema de coordenadas que escolhemos, que traz um ponto no

passado distante  $\eta = -\infty$ , para  $t = 0$ . Tal ponto não corresponde a uma singularidade física, como o Big Bang.

Se  $\alpha < 1$ , contudo,  $\eta$  convergirá para  $\eta = 0$ , e assim (18) estará definido apenas para  $\eta \geq 0$ . A estrutura causal será então a do espaço-tempo de Minkowski com a parte  $\eta < 0$  cortado. A linha  $\eta = 0$  é chamada de **fronteira conforme** do espaço-tempo. Note que se dois pontos estiverem suficientemente próximos de  $\eta = 0$ , não haverá qualquer relação causal entre eles. Ambas as situações  $\alpha > 1$  e  $\alpha < 1$  estão mostradas na Figura 2.

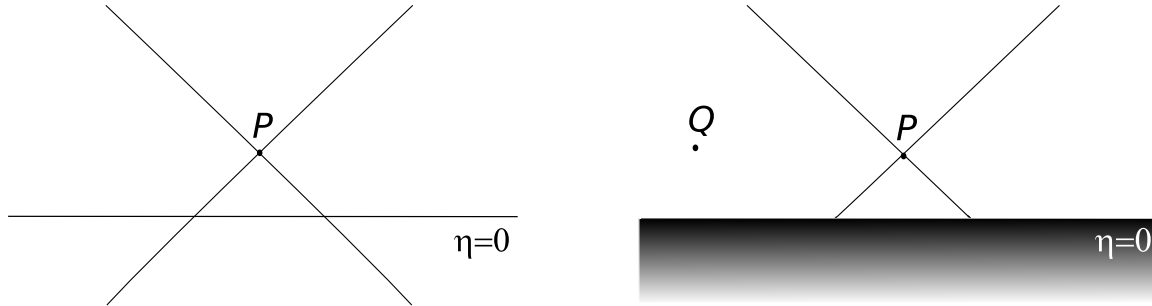


Figura 2: A estrutura causal dos universos com métrica do tipo FRW e seção espacial euclidiana para  $a(t) \propto t^\alpha$ . O caso  $\alpha > 1$  e  $\alpha < 1$  estão, respectivamente, à esquerda e à direita acima. À esquerda, podemos estender o cone de luz sem problema algum além de  $\eta = 0$ , enquanto isto não é possível para  $\alpha < 1$ . Note também que não há nenhuma relação causal entre  $P$  e  $Q$  à direita.

A pergunta que se põe, face aos estudos da última aula é *quão correta está a solução de FRW (8) na descrição do universo observável?* A pergunta é de fato muito pertinente já que a pequena parte do universo que conseguimos ver à noite não parece em nada isotrópica e muito menos homogênea.

Tal como um gás ideal em uma caixa, também neste caso a noção de homogeneidade e isotropia é um efeito das “amostras” que tomamos. Para uma pessoa sobre a Terra, que olhe uma região de  $1 \text{ pc}^3$ , o universo de fato não aparentar ser nem homogêneo nem isotrópico, assim como uma pessoa que olhe um pequena região em uma caixa, digamos um cubo com  $10 \text{ nm}$  de lado, um gás não será de forma alguma homogêneo. Da mesma forma, a partir de distâncias da ordem de  $100 \text{ Mpc}^2$ , nota-se que o universo é bastante homogêneo, fato que foi exaustivamente testado tanto com base no que podemos ver do espectro visível quanto ondas de rádio e raios X, como ilustrado na Figura 3. Curiosamente a razão entre as distâncias planetárias  $\approx 0,1 \text{ pc}$  e as cosmológicas  $\approx 100 \text{ Mpc}$  é a mesma que as distâncias atômicas  $\approx 1 \text{ nm}$  e as distâncias mundanas  $\approx 1 \text{ m}$ .

Podemos assim, justificar nossa suposição de que o universo é homogêneo e isotrópico e então usar a métrica FRW (8) para fazer previsões sobre cosmologia. Uma das conclusões que tiramos da noção de isotropia e homogeneidade foi a de que a ação da matéria na geometria do universo, ao menos nas escalas cosmológicas, é bem aproximada pelo tensor de energia-momento de um fluido perfeito (10):

$$T_{ab} = \rho T_a T_b + P(g_{ab} + T_a T_b). \quad (23)$$

Podemos perguntar a este momento, o que sabemos sobre a pressão e a densidade de energia da matéria observável. Para sistemas em **equilíbrio termodinâmico**, sabemos que os dois estão relacionados por uma equação de estado. Por exemplo, para um gás ideal monoatômico,

<sup>2</sup>1 Mpc, ou 1 megaparsec, é equivalente a  $3 \times 10^{21} \text{ m}$ .

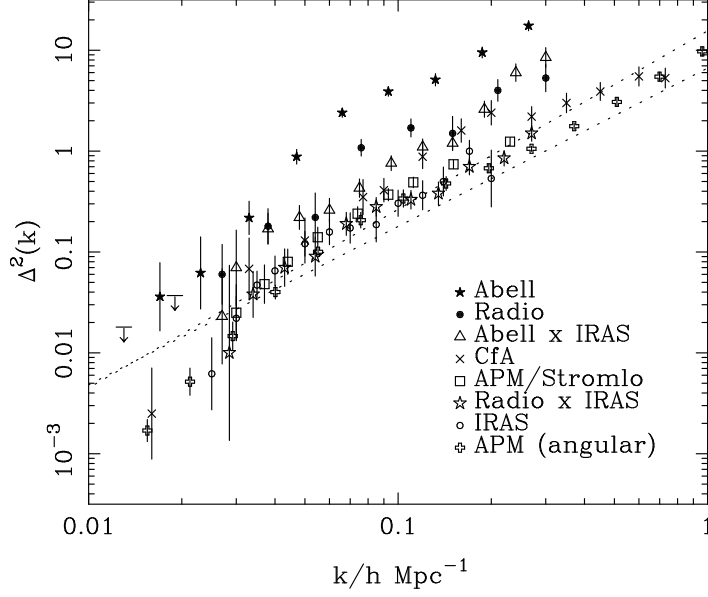


Figura 3: Uma distribuição do quadrado da flutuação da densidade dos objetos visíveis com o inverso da distância, segundo vários experimentos. De acordo com o gráfico, as flutuações são de menos de 1 por cento à distância de 100 Mpc. Gráfico por Peacock e Dodds, [9].

$\rho = \frac{E}{V} = \frac{3}{2}P$ , para um gás de fótons (**radiação**),  $\rho = 3P$ . Para partículas de **poeira**,  $P = 0$  e assim por diante. Normalmente esta relação é colocada da seguinte forma:

$$P = w\rho \quad (24)$$

Com  $w$  constante.

Conforme vimos na aula anterior, a requisição de que o tensor energia-momento seja conservado  $\nabla^a T_{ab} = 0$  implica em muitas restrições para a evolução temporal de  $\rho$  e  $P$ . De fato usando a equação (3) para a derivada de  $T^a$ :

$$\nabla_a T^b = \theta(\delta_a^b + T_a T^b), \quad (25)$$

podemos aplicar a condição de conservação  $\nabla_a T^{ab} = 0$ . O resultado será:

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \implies (\dot{\rho} + 3\theta(P + \rho))T_b = 0 \quad (26)$$

usando  $P = w\rho$  e  $\theta = \dot{a}/a$ , isto nos dá uma equação diferencial simples para  $\rho$ :

$$\dot{\rho} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho a^{3(1+w)} = \text{constante!} \quad (27)$$

Antes de mais nada, a solução acima faz sentido, já que a lei de conservação para partículas de poeira nos diz que a energia desta configuração deve ser constante à medida que o volume do espaço  $\propto a^3$  aumenta. Da mesma forma, ao aplicarmos (27) para um gás ideal, vemos que podemos pensar na evolução do universo como um processo isentrópico. Note também que a condição forte de energia (16) requer que a pressão não seja muito negativa:

$$w > -\frac{1}{3}. \quad (28)$$

A equação para evolução da densidade de energia (27) tem também outra consequência importantíssima. Como a densidade de energia cai com diferentes taxas à medida que o universo se expande, teremos, exceto em alguns pontos de inflexão, **sempre uma forma de energia dominante**. Na presente época do universo, essa forma de energia é a poeira. De fato, o tensor de energia-momento para o universo presentemente é muito bem aproximado por  $T_{ab} = \rho T_a T_b$ . Nas fases iniciais do universo, este papel era cumprido pela radiação, cuja densidade de energia cai mais rapidamente que poeira:

$$\rho \propto \frac{1}{a^4}, \text{ (radiação);} \quad \rho \propto \frac{1}{a^3}, \text{ (poeira).} \quad (29)$$

Segundo medidas recentes, este “ponto de inflexão”, em que as contribuições de poeira para a energia do universo ultrapassou a energia devido à radiação quando o fator de escala do universo era cerca de 1000 vezes menor do que é hoje. Note também que ambas eram muito maiores no início do universo que na época presente. O termo “Big Bang Quente” parece acurado para descrever o estado inicial do universo.

## A Lei de Hubble

De imensa importância histórica foi a predição, pelas equações de Einstein, que o fator de escala do universo  $a(t)$  realmente variava com o tempo. Isto demoliu por completo a noção de espaço absoluto que reinava até então, e lançou as bases da Cosmologia moderna. Esta expansão é diretamente vista pelo efeito Doppler da luz emitida por galáxias distantes, medido pela primeira vez por E. Hubble em 1929. Disto iremos nos ocupar nesta seção.

Começemos com ótica geométrica. Um raio de luz pode, nesta aproximação, ser entendido como uma trajetória no espaço-tempo do tipo nulo, isto é,  $ds^2 = 0$  por toda a trajetória. Seja  $k^a$  o vetor tangente a esta trajetória. A componente temporal deste vetor é a sua **frequência**  $\omega$ , ou, mais geralmente,

$$\omega = -k^a u_a, \quad (30)$$

onde  $u^a$  é o vetor tangente ao observador que mede a frequência da luz. Note que  $u^a u_a = -1$ .

Para um observador que segue o “tempo cosmológico”  $t$ , seu vetor tangente é  $u^a = T^a$ , e a métrica é (8):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\Sigma_{0,\pm}^2. \quad (31)$$

Imagine então que o raio de luz foi lançado com frequência  $\omega_1$  por um observador a um tempo cosmológico  $t_1$ . Neste caso, sabemos qual é a componente  $k^0$  do raio de luz. Porém, como  $k^a$  é nulo, sabemos também sua projeção espacial, pois:

$$g_{ab} k^a k^b = -\omega_1^2 + h_{ab} k^a k^b = -\omega_1^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}|_{t=t_1} = 0 \quad (32)$$

e  $\mathbf{k}$  é o vetor de onda tridimensional. Assim, podemos reescrever

$$\omega_1 = -k^a u_a = k_a \left[ \frac{\eta^a}{\sqrt{\eta_b \eta^b}} \right]_{t=t_1} \quad (33)$$

onde  $\eta_a$  é um vetor tipo espaço, que aponta na direção do vetor de onda  $\mathbf{k}$  do raio de luz. Note que introduzimos explicitamente a condição de que  $\eta^a$ , assim como  $u^a$  acima, deve ser propriamente normalizado.



Contudo, como o espaço é isotrópico e homogêneo, o único efeito sobre a evolução de  $\eta^a$  será a sua expansão, como podemos ver da métrica FRW (8). Desta forma, podemos relacionar a dilatação de  $\eta^a$  com os fatores de escala em tempos diferentes:

$$\frac{\left[\sqrt{\eta_b\eta^b}\right]_{t=t_1}}{\left[\sqrt{\eta_b\eta^b}\right]_{t=t_2}} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \quad (34)$$

Combinando as duas equações, saberemos com qual frequência um observador medirá o raio de luz a tempo cosmológico  $t_2$ :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \quad (35)$$

E o **fator de desvio para o vermelho** será:

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} - 1, \quad (36)$$

donde, expandindo em série de Taylor, obtemos a **Lei de Hubble**:

$$z \approx (t_2 - t_1)\dot{a} \approx R\frac{\dot{a}}{a} = HR. \quad (37)$$

Nesta equação,  $R$  é a distância entre dois pontos próximos, dada aproximadamente por  $a(t_2 - t_1)$  e  $H$  é conhecido comumente por **Constante de Hubble**. Porém, como vimos,  $H = \theta$ , o nosso fator de expansão, não é constante. Vamos de qualquer forma manter a tradição e a terminologia chamando  $H$  assim. O valor de  $H$  é, presentemente, segundo medições do satélite [WMAP](#):

$$H = 71 \pm 4 \text{ (km/s)/Mpc} \quad (38)$$

## Radiação Cosmológica de Fundo

A aplicação das Equações de Einstein para as métricas do tipo FRW (8) têm uma importância histórica, além de servir de base para explicar algumas definições em cosmologia. Infelizmente, para fazê-lo vamos ter de nos demorar mais um pouco no cálculo do tensor de Ricci:

$$R_{abc}{}^d = \partial_b\Gamma^d{}_{ac} - \partial_a\Gamma^d{}_{bc} + \Gamma_{ac}^e\Gamma^d{}_{eb} - \Gamma_{bc}^e\Gamma^d{}_{ea}. \quad (39)$$

Para calcular o tensor de Ricci, temos primeiro que calcular os símbolos de Christoffel da métrica (8). A maneira mais direta de fazê-lo é notar que podemos dividir os índices naturalmente entre o tempo  $t$ , e as direções espaciais  $i, j, k$ . Desta forma podemos fazer uso do fato que a única dependência da métrica com  $t$  é via o fator de escala:

$$\partial_t(g_{ij}) = 2\frac{\dot{a}}{a}g_{ij} = 2\theta g_{ij}. \quad (40)$$

Desta forma teremos 8 opções para os símbolos de Christoffel, facilmente calculadas a partir de sua definição:

$$\begin{aligned} \Gamma^t{}_{tt} = \Gamma^t{}_{ti} = \Gamma^t{}_{it} = 0, \quad \Gamma^i{}_{tj} = \Gamma^i{}_{jt} = \theta\delta_j^i, \\ \Gamma^t{}_{ij} = \Gamma^t{}_{ji} = \theta g_{ij}, \quad \Gamma^i{}_{jk} = \Gamma^i{}_{kj} = \bar{\Gamma}^i{}_{jk}. \end{aligned} \quad (41)$$

Onde  $\bar{\Gamma}^i{}_{jk}$  é o símbolo de Christoffel associado com a métrica espacial  $h_{ab}$ . Sua forma explícita não será necessária, mas usaremos o fato que ela terá curvatura constante.

Usando a equação acima para o tensor de Ricci, vemos as componentes não-nulas são:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3(\dot{\theta} + \theta^2), \\ R_{ij} &= \bar{R}_{ij} + (\dot{\theta} + 3\theta^2)g_{ij}, \end{aligned} \quad (42)$$

onde  $\bar{R}_{ij}$  é o tensor de Ricci associado com  $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ . Note que  $R_{tt}$  é exatamente  $T^a R_{ab} T^b$  calculado na aula anterior (14). Podemos então escrever diretamente as equações de Einstein:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P) \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} &= 4\pi G_N(\rho - P) \end{aligned} \quad (43)$$

onde  $k$  é uma constante, +1 para seção espacial esférica, -1 para seção espacial hiperbólica e 0 para seção espacial euclideana. A segunda equação é costumeiramente apresentada como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho \quad (44)$$

e o sistema é conhecido como **Equações de Friedmann**.

A partir da equação (44) e da equação de estado (24),

$$P = w\rho, \quad (45)$$

podemos achar diretamente o fator de escala por quadratura. Vimos no início desta aula (27) que conservação do tensor de energia-momento leva à conservação da quantidade

$$\rho(t)a^{3(1+w)}(t) = \rho(t_0)a^{3(1+w)}(t_0). \quad (46)$$

Então nossa equação diferencial será do tipo

$$\dot{a}^2 - Ca^{-(1+3w)} + k = 0, \quad (47)$$

cujas soluções dependem dramaticamente do sinal de  $k$ , ou seja, do fato das seções espaciais serem esféricas, euclidianas ou hiperbólicas. Na Figura 4 pode-se ver o gráfico de  $a(t)$  para diferentes valores de  $k$  e  $w = 0$ , embora o gráfico não seja qualitativamente diferente para radiação ou outras formas de matéria que satisfazem a condição forte de energia (16).

Com base no resultado para as equações de Friedmann esboçados na Figura 4, torna-se interessante definir um parâmetro que possa ser medido diretamente e nos diga se o universo se colapsará ou não. Para isso vamos reescrever a equação (44) como:

$$\frac{k}{\dot{a}^2} = \frac{8\pi G_N}{3\theta^2}\rho - 1 \equiv \Omega - 1 \quad (48)$$

onde introduzimos o **parâmetro de densidade**:

$$\Omega = \frac{8\pi G_N}{3\theta^2}\rho \quad (49)$$

que, se for maior que 1, nos dirá que a matéria do universo é suficiente para colapsá-lo em um “Big Crunch”.

Supreendentemente, a mais recente medição de  $\Omega$  (pelo satélite [WMAP](#), veja [10] para detalhes) nos dá:

$$\Omega = 1,02 \pm 0,02, \quad (50)$$

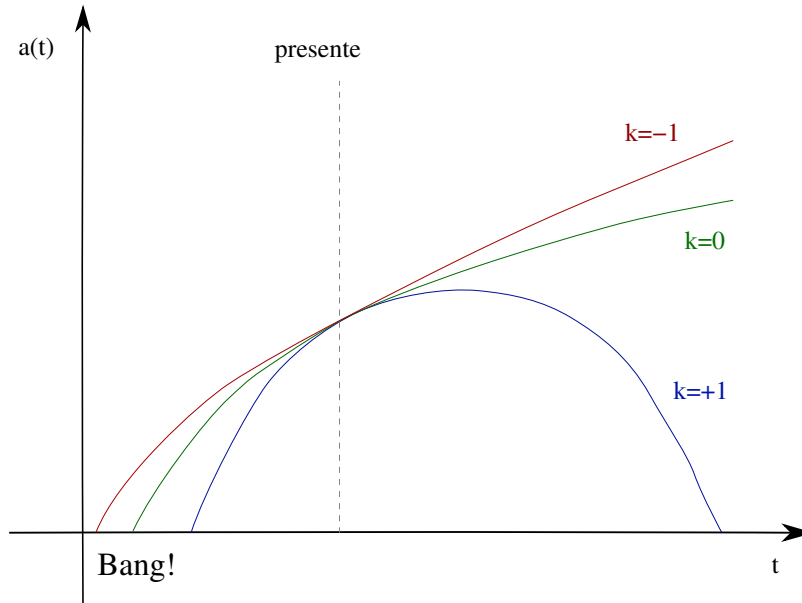


Figura 4: Três opções para o nosso universo, segundo (47) para  $w = 0$  (poeira). Se  $k = +1$ , ou seja, a seção espacial do universo for esférica, o universo colapsará em algum momento do futuro. Se  $k = 0$  ou  $k = -1$ , ele se expandirá indefinidamente. Gráfico inspirado por [7].

ou seja, a seção espacial do universo atual é basicamente euclideana, ou **plana**. Vamos discutir este resultado e suas implicações mais abaixo.

Conforme dissemos nos nossos estudos sobre a evolução do universo, diferentes épocas do universo têm sempre uma forma de energia dominante. No universo atual, ao menos até recentemente, este papel é desempenhado pela “poeira”, que não tem pressão  $P$ . Isto é condizente com o que conhecemos do universo em escalas planetárias: estrelas esparsamente distribuídas que não tem como interagir com suas vizinhas. O universo se encontra no que chamamos de **era dominada pela matéria**.

Vimos (27) que a densidade de energia devida à radiação ( $w = 1/3$ ) decai mais rapidamente que a densidade de energia da matéria ( $w = 0$ ). De fato, a razão entre as duas deve obedecer uma dependência simples com o fator de escala:

$$\frac{\rho_e}{\rho_m} \propto \frac{1}{a(t)} \quad (51)$$

Se seguirmos o raciocínio inverso, nos daremos conta que em algum momento a energia dominante era de fato a radiação. O universo estava no que chamamos de **era dominada pela radiação**. Esta era tem de fato uma consequência observável mesmo nos dias de hoje. Ocorre que naquela época em que o fator de escala era pequeno o suficiente, a radiação interagiu bastante com a matéria, de forma que o universo era *opaco*. Segundo [10], isto aconteceu quando

$$\frac{a(t_{\text{hoje}})}{a(t_{\text{igualdade}})} = 3455^{+385}_{-392}. \quad (52)$$

É de se esperar, então, que em algum instante depois dessa igualdade, a matéria ficou esparsa o suficiente para que a radiação efetivamente deixasse de interagir com ela. Este ponto é conhecido como **superfície de último espalhamento**, e aconteceu quando

$$\frac{a(t_{\text{hoje}})}{a(t_{\text{espalhamento}})} \approx 1000 \quad (53)$$

Desde então esta radiação expandiu e esfriou. Isto hoje é visto como um espectro de corpo negro a  $T \approx 2,725$  K, extremamente homogêneo e isotrópico. Esta radiação, conhecida por **Radiação Cosmológica de Fundo**, foi observada pela primeira vez por Penzias e Wilson em 1965 e marcou a primeira verificação experimental da teoria do “Big Bang Quente”. O estudo detalhado desta radiação tem sido de extrema importância no estabelecimento da Cosmologia de precisão, e vai continuar a revolucionar nossa visão sobre o universo por ainda décadas.

## Fronteiras

O retrato que descrevemos até aqui compreende o que é chamado de **Modelo Padrão da Cosmologia**. Apesar de extremamente exitoso para descrever aspectos gerais do universo, o modelo como se apresenta não consegue prever detalhes sobre sua evolução. Vamos, nesta seção final, tentar apresentar seus problemas e descrever as modificações mais prováveis para que se inclua alguns dos dados experimentais.

Note que, quando apresentamos o valor da temperatura da radiação cosmológica de fundo, a fizemos com três casas decimais. Isto se deve ao fato desta radiação ser efetivamente muito homogênea, com flutuações da ordem de  $10^{-5}$ . Este é o “corpo negro” mais uniforme que se tem notícia. As flutuações, por outro lado, foram detectadas na década de 1970 e são impressionantemente constantes com a variação da frequência. Esta invariância é tão pequena que põe em dúvida a hipótese que assumimos que a matéria-energia do universo estava em equilíbrio termodinâmico. De fato, pela mecânica estatística, esperaria-se uma forte dependência das flutuações do número de fótons por frequência:

$$\frac{\Delta n(\omega)}{n(\omega)} \approx \frac{(kT)^3}{(\hbar\omega)^3} \quad (54)$$

Porém o que se observa é uma flutuação praticamente *independente* da frequência. Duas hipóteses são naturais a este ponto: ou o universo estava em algum estado especial no instante da última superfície de espalhamento, ou houve algum processo que resultou na uniformização abrupta dessas flutuações.

Cada uma das hipóteses tem argumentos extremamente fortes ao seu favor, e a questão está longe de ser respondida. Uma corrente de pensamento diz, em suma, que sabemos muito pouco sobre o espaço de fase de teorias com gravitação para falar de “estatística natural” [11]. Outra corrente de pensamento, mais pragmática, supõe que o universo passou por alguma fase de sua evolução em que o fator de escala crescia tão rapidamente que não haveria mecanismo que pudesse “termalizar” as flutuações. Tal mecanismo é chamado de **inflação cosmológica**, e foi proposto independentemente por Starobinski, Vilenkin, Guth e Linde [12] para explicar alguns fatos curiosos sobre o universo, os quais listamos.

- *As seções espaciais do universo são muito planas.* Segundo vimos acima,  $\Omega \approx 1$ , pelo menos por uma parte em 50. Seria desejável imaginar algum mecanismo de evolução do universo em que  $\Omega$  fosse próximo a 1 naturalmente, ao invés de simplesmente postular este fato. A teoria inflacionária explica-nos que isto se deve ao fato de todas as curvaturas espaciais terem se reduzido durante a fase que  $a(t)$  crescia rapidamente. Este problema é conhecido como problema da planitude.
- *O universo é muito homogêneo.* Como vimos, a noção básica que a matéria do universo está em equilíbrio termodinâmico requer que haja interação entre suas diversas partes.

O problema é que, segundo as recentes medições da constante de Hubble, sabemos que o universo tem menos de

$$t \approx \frac{1}{H} \approx (13,4 \pm 0,3) \times 10^9 \text{ anos.} \quad (55)$$

Este tempo é menor que o necessário para que um raio de luz trafegue de um extremo a outro do universo visível, e desta forma, nenhuma interação pode ter surgido entre tais partes. Não é natural, então, que encontremos tais extremos em *exatamente* o mesmo estado, mesma composição de matéria, mesma temperatura. A teoria inflacionária nos diz aqui que, como o universo passou por este período de expansão rápida, pontos aparentemente muito distantes do cosmo hoje em dia tiveram de fato algum tipo de contato no passado. Este é conhecido como **problema do horizonte**.

- *Não se sabe qual o mecanismo que forneceu flutuações de densidade fortes o bastante para a criação das estruturas de galáxias que vemos hoje.* Este mecanismo deve ser de fato, independente da frequência como o que a teoria inflacionária nos dá. Nenhum outro modelo tem uma resposta satisfatória a este problema.

O problema principal da teoria inflacionária é a natureza do mecanismo que geraria uma expansão tão acelerada assim. Para resolver os problemas acima, teríamos que ter um período em que  $a(t)$  crescesse mais rápido que  $t$ , o que em nossas convenções significaria que um raio de luz não poderia cobrir a distância espacial entre dois pontos distintos. Façamos então  $a(t) \propto t^\alpha$ , com  $\alpha > 1$ . Então o fator de expansão será:

$$\theta = \frac{\alpha}{t}, \quad \alpha > 1 \quad (56)$$

Então a equação de Raychaudhuri nos daria:

$$\dot{\theta} + \theta^2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{t^2} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P) \quad (57)$$

Ou seja  $\rho + 3P < 0$  e a matéria responsável pelo mecanismo de inflação **violaria a condição forte de energia**. Não se conhece nenhuma forma de matéria em equilíbrio que viola esta condição. Se houvesse tal matéria, ela teria uma equação de estado do tipo (28), com  $w < -1/3$ . Pode-se contornar este problema ao supor-se que a matéria em questão se encontra em um estado especial, mas aqui não se resolve efetivamente o problema que a inflação cosmológica se propõe. Como dissemos acima, a inflação cosmológica foi proposta como um mecanismo que explica o estado especial do universo. Ao supormos que o estado do universo era especial ao princípio, esvaziamos suas conclusões.

Há contudo, uma situação em teoria quântica de campos em que (28) é violada. Como podemos ver em fenômenos críticos, podemos ter instabilidades coletivas, como por exemplo o superresfriamento, em que a energia do sistema pode ser pensada como estando em um máximo local. A maneira covariante de dizer isso em teoria de campos é dizer que o tensor momento-energia será dado por

$$T_{ab} = -\lambda g_{ab} \quad (58)$$

Onde  $\lambda > 0$  pode ser pensada como a energia do estado instável, acompanhada de uma pressão negativa. De fato, quando derivamos a equação de Einstein, nos baseamos na conservação do tensor  $R_{ab} - 1/2g_{ab}R$ , mas omitimos que o tensor  $\Lambda g_{ab}$  também é conservado se  $\Lambda$  for constante. Desta forma, poderíamos ter dito que a equação de Einstein mais geral é

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}. \quad (59)$$

$\Lambda$  é conhecido como **constante cosmológica**, e foi proposta pela primeira vez por Einstein na tentativa de criar um modelo do universo que fosse estático. Infelizmente este modelo era instável, e assim não era realista, e a introdução da constante cosmológica, vista como supérflua, não teve impacto na criação do modelo padrão de cosmologia.

Para efeitos de mecanismos de inflação, contudo, a equação (58) parece funcionar pois nele  $\rho = -P$ , e assim  $w = -1$  e a condição forte de energia é violada. Porém o modelo foi abandonado, pelo fato de, assim como no exemplo de superresfriamento, a relaxação do universo se daria de maneira tão violenta que toda as flutuações criadas segundo a regra de independência da frequência seriam afetadas. Este problema é conhecido como o da **saída graciosa**. Até hoje não se encontrou um mecanismo fidedigno para a inflação cosmológica, que responda a mais questões que crie.

De qualquer forma, mesmo com um mecanismo de inflação aceitável, teríamos vários problemas para explicar a composição *atual* do universo. O satélite **WMAP** mediu não só o parâmetro de densidade atual do universo, como também discriminou as contribuições vindas de diferentes tipos de energia. Acha-se os seguintes parâmetros de densidade para a matéria:

$$\begin{aligned}\Omega_{\text{bariônica}} &= 0,047 \pm 0,006, \\ \Omega_{\text{matéria}} &= 0,29 \pm 0,07.\end{aligned}\tag{60}$$

Este é um resultado surpreendente. Toda matéria que conhecemos é bariônica, formada por prótons e nêutrons. No entanto, vemos que ela compreende apenas um sexto de toda a matéria do universo. O restante é um tipo de matéria não prevista pelo modelo padrão de física de partículas. O impacto é ainda maior quando lembramos que o modelo de partículas é exaustivamente testado e tem tido sucesso em todos os experimentos em aceleradores. Em escala cósmica, contudo, falha ao prever a existência desta **matéria escura** que compõe a maior parte do universo conhecido<sup>3</sup>. O estudo das propriedades da matéria escura parece ser o caminho mais promissor para o estudo da física de partículas além do modelo padrão. Veja [14] para detalhes.

Outra verificação, não menos bombástica, é que a *maior parte da energia do universo é de uma forma completamente desconhecida por nós*:

$$\Omega_{\text{outras formas}} \approx 0,70.\tag{61}$$

No artigo [10], há também uma predição sobre a equação de estado desta forma de energia, chamada de **energia escura**:

$$P = w\rho, \quad w < -0,78.\tag{62}$$

Ou seja, tal energia viola a condição forte de energia. Pelo que vimos na discussão sobre inflação, isto significa que  $a(t) \propto t^\alpha$ , com  $\alpha > 1$ . Ao estudarmos a estrutura causal da métrica

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2\alpha}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\tag{63}$$

como fizemos na seção anterior, vemos que a integral do tempo conforme (19) converge para  $t \rightarrow \infty$ :

$$\eta(t) = \int^t \frac{dt'}{a(t')} = -\frac{t^{1-\alpha}}{\alpha-1}\tag{64}$$

---

<sup>3</sup>Também se acredita que a matéria escura seja responsável pela relação de Tully-Fishler que determina a constância da velocidade aureolar de estrelas nas periferias das galáxias espirais. Neste caso há também uma relação fenomenológica proposta [13] que modifica a Segunda Lei de Newton. Ela é conhecida como MOND (MODified Newtonian Dynamics).

e entraremos, assim em um novo período inflacionário, onde perderemos contato causal com os vizinhos (Veja figura 5). Sinais vindos das nossas vizinhanças terão um desvio para o vermelho cada vez maior até que depois de um ponto não será mais possível observá-los. Tal limite nos eventos que podemos ver é chamado de **horizonte cosmológico** e parece ser nosso destino, se as conclusões do WMAP forem verificadas.

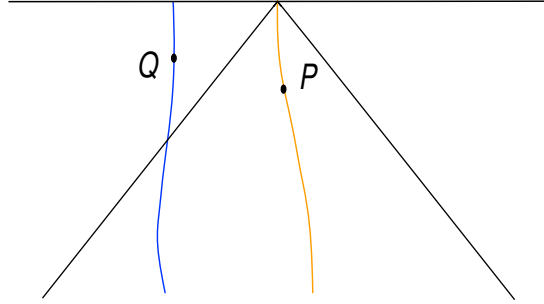


Figura 5: A estrutura causal do universo no futuro. Veja que após um certo tempo, os observadores que seguem as duas linhas-mundo perderão contato. Por exemplo, o observador que passa por  $P$  não verá o evento  $Q$ .

Ao contrário da matéria escura, contudo, temos um candidato natural para a energia escura, que é a constante cosmológica introduzida acima. Como dissemos, ali temos  $\rho = -P$  e assim  $w = -1$  não satisfaz a condição forte da energia, e assim geraria o efeito de energia escura verificado pelo WMAP. Note, contudo, que este mecanismo é diferente do mecanismo de inflação, pois se aplica a evolução final do universo. Desta forma evitamos o problema da saída graciosa. O valor de  $\Lambda$  para que tal termo seja responsável pela matéria escura é muito pequeno:

$$\Lambda \approx 10^{-38} \text{ Kg/m}^3 \quad (65)$$

e não teria efeito observável durante o processo inflacionário. Seria contudo, extremamente anti-natural ter uma constante pequena desta forma. Qualquer que fosse o mecanismo que prevesse este resultado para  $\Lambda$  ele teria que ser preciso em uma parte em  $10^{120}$  para que se passasse das energias naturais durante a criação do universo (da ordem da energia de Planck), para valores de  $\Lambda$  como o acima. Este é o chamado **problema da sintonia fina** em cosmologia.

Qualquer que seja o seu mecanismo, a detecção da energia escura nos põe com outro problema inesperado. Note que mesmo sendo maior, a contribuição da energia do universo dada pela matéria ( $\approx 30\%$ ) é comparável àquela dada pela energia escura ( $\approx 70\%$ ). Segundo (27), sabemos que a evolução da densidade de energia depende de sua equação de estado:

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{constante}. \quad (66)$$

Parece uma coincidência incrível que vivemos em uma época em que duas formas de energia distintas, com  $w$ s distintos, são comparáveis. Este é chamado de **problema da coincidência**.

Vê-se dessa forma que a Cosmologia nos apresenta com formidáveis desafios que irão, com certeza, modificar nossa visão sobre a Natureza. Aqui listamos apenas alguns, que consideramos mais importantes. Podemos dizer sem medo de pretensão que a compreensão destes resultados experimentais é, hoje, o problema mais importante da física teórica.

## Referências

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc (1972).
- [2] Jean-Philippe Uzan, *The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 403, [[arXiv:hep-ph/0205340](#)].
- [3] V. I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir, 1985; alternativamente, pode-se consultar do mesmo autor *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, (1989), §18;
- [4] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides – LTC (1988);
- [5] L. Landau e E. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 2: Teoria do Campo*, Editora Mir, (1980);
- [6] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [7] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, [[arXiv:gr-qc/9712019](#)], ou *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).
- [8] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [9] J. A. Peacock e S. J. Dodds, *Reconstructing the linear power spectrum of cosmological mass fluctuations*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **267**, 1020 (1994) [[arXiv.org:astro-ph/9311057](#)].
- [10] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003) [[arXiv:astro-ph/0302209](#)].
- [11] S. Hollands and R. M. Wald, *An alternative to inflation*, Gen. Rel. Grav. **34** (2002) 2043 [[arXiv:gr-qc/0205058](#)].
- [12] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems*, Phys. Rev. D **23**, 347 (1981); A. D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. B **108**, 389 (1982).
- [13] M. Milgrom, *MOND—a pedagogical review*, Acta Phys. Polon. B **32**, 3613 (2001) [[arXiv:astro-ph/0112069](#)].
- [14] G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*, Phys. Rept. **405**, 279 (2005) [[arXiv:hep-ph/0404175](#)].