



Introdução à Relatividade Geral

Notas de aula por Bruno Carneiro da Cunha

Parte 6: A gravitação linearizada

Perturbações da métrica minkowskiana

Nas partes anteriores listamos um procedimento genérico para calcular a geometria de um espaço preenchido de energia. Porém, como se sabe, a Relatividade Geral veio substituir uma teoria de gravitação com duzentos anos e estrondoso sucesso em prever a esmagadora maioria dos fenômenos conhecidos até então, como a existência de Netuno e das leis empíricas conhecidas como as Leis de Kepler.

O caminho que seguimos até aqui neste curso foi diametralmente oposto ao de Newton quando este propôs sua teoria da Gravitação. Não havia nada guiando Einstein a não ser sua confiança que, assim como o princípio da equivalência, a Relatividade Restrita, ou seja, a equivalência entre tempo e espaço, era um princípio fundamental do universo. Newton trabalhava com séculos de dados experimentais sobre o movimento dos planetas no sistema solar, que na época já haviam sido “talhados” na forma das Leis de Kepler.

Einstein, por outro lado, tinha muito pouco. Mesmo a hoje celebrada precessão do periélio de Mercúrio, era na época uma medida complicada com muitas explicações possíveis dentro da gravitação newtoniana. Usando o sucesso da previsão da órbita de Netuno feita pelos astrônomos John Adams e Urbain Le Verrier, este último propôs à época a existência de um planeta interior à Mercúrio, chamado *Vulcano*, que perturbaria a órbita do primeiro e faria com que seu periélio se comportasse da forma vista. Obviamente tal planeta nunca foi achado, mas havia um certo consenso que a resposta para tal enigma não envolveria uma reformulação completa da teoria da gravitação.

Talvez o fato experimental mais inquietante para a física newtoniana era o *Paradoxo de Olbers*. Em uma pergunta trivial, o paradoxo se resume a uma simples pergunta: *por que o céu é escuro à noite?* O argumento pelo contrário parecia, na verdade, sem falhas: a luminosidade de cada estrela deveria decair com o quadrado da distância, mas o número de estrelas deveria aumentar com o cubo da distância. Assim, se esperaria que a luminosidade total de um universo infinito fosse tão alta que o céu à noite seria tão claro quanto o dia.

Vamos lidar com este último paradoxo na parte sobre o modelo cosmológico padrão, mas a mensagem que queremos passar é que a teoria da gravitação que Einstein, por mais fundamentada que possa parecer, deve incluir as previsões da gravitação newtoniana. Mais ainda, como a relatividade geral se propõe a ter um regime de aplicabilidade mais amplo que a gravitação Newtoniana, a primeira deve nos dar condições específicas de quando a última pode ser usada.

Intuitivamente, podemos pensar que a gravitação é “fraca” quando a geometria do espaço-tempo é quase “plana”, isto é, quase “minkowskiana”. Com isto a métrica satisfará:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \epsilon h_{ab} \tag{1}$$

onde $\epsilon \ll 1$. O tensor ϵh_{ab} é assim “pequeno” em comparação à métrica base minkowskiana η_{ab} . Esta noção de “pequeno” deveria na verdade ser feita de modo estrito, mas isto não é possível. Faremos contudo a requisição que os auto-valores de h_{ab} , vista agora como uma

aplicação linear em um sistema de coordenadas conveniente, sejam finitos, de forma que sempre podemos escolher ϵ pequeno o bastante para conduzir as aproximações feitas nesta seção.

A impossibilidade de se fazer esta requisição de modo rigoroso está no fato da métrica com a qual trabalhamos ter assinatura minkowskiana. Com isto, um conceito de norma de aplicações lineares, como por exemplo o maior elemento em módulo de uma matriz escrita em uma base ortonormal, simplesmente não serve como um limite superior conveniente. Isto na verdade pode ser visto com distâncias no espaço de Minkowski. Dois eventos P e Q próximos de um mesmo cone de luz têm uma distância espaço-temporal naturalmente pequena, mas não estão de forma nenhuma “próximos”, como mostra a Figura 1:

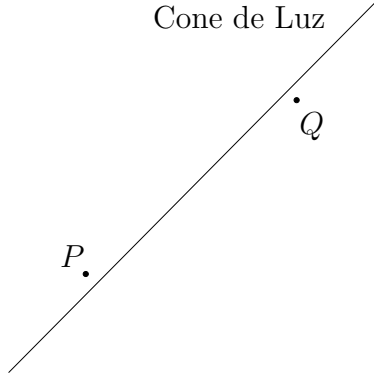


Figura 1: Dois eventos com “distância” espaço-temporal pequena. Apesar disto, eles não estão “próximos”. O mesmo na verdade acontece com transformações lineares e assim com perturbações da métrica, o que impossibilita a definição precisa de “pequenas perturbações”.

Com tudo isto em mente, podemos prosseguir com os cálculos. A métrica inversa, ao menos em primeira ordem, será:

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \epsilon h^{ab} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (2)$$

Onde $h^{ab} = \eta^{ac} h_{cd} \eta^{db}$. Note que, obviamente, a perturbação da métrica h_{ab} não precisa ser invertível. A conexão afim que relaciona a derivada covariante ∇_a compatível com g_{ab} com a derivada covariante ∂_a compatível com η_{ab} pode ser calculada a partir da receita dada:

$$C_{ab}^c \approx \frac{\epsilon}{2} \eta^{cd} (\partial_a h_{db} + \partial_b h_{ad} - \partial_d h_{ab}) \quad (3)$$

mais uma vez, a menos de termos de ordem superior em ϵ , que vão ser omitidos de agora em diante. O tensor de Riemann relativo também pode ser calculado a partir dos preceitos gerais:

$$R_{abc}{}^d = -\partial_a C_{bc}^d + \partial_b C_{ac}^d + C_{ac}^e C_{be}^d - C_{bc}^e C_{ae}^d. \quad (4)$$

porém agora note que os dois últimos termos serão de ordem quadrática em ϵ e serão omitidos. Substituindo (3) acima e contraindo b e d para obtermos o tensor de Ricci, teremos:

$$R_{ab} \approx \partial_c C_{ab}^c - \partial_a C_{cb}^c \approx \epsilon \left(\partial^c \partial_{(a} h_{b)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c h_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b h_c^c \right). \quad (5)$$

E o tensor de Einstein será:

$$G_{ab} \approx \epsilon \left(-\frac{1}{2} \partial^c \partial_c \bar{h}_{ab} + \partial^c \partial_{(a} \bar{h}_{b)c} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{h}_{cd} \right) \quad (6)$$

onde

$$\bar{h}_{ab} = h_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}h_c^c. \quad (7)$$

O tensor de Einstein deve ser então igualado ao tensor de energia-momento, e assim a solução ϵh_{ab} será a perturbação da métrica.

Há porém uma maneira de simplificar ainda mais a expressão (6), usando da invariância que temos pela mudança do sistema de coordenadas. Conforme vimos, quando agimos no espaço-tempo por um difeomorfismo gerado por um campo vetorial v^a , a métrica muda segundo a derivada de Lie:

$$\mathcal{L}_v \eta_{ab} = \partial_a v_b + \partial_b v_a \quad (8)$$

isto significa que duas perturbações, h_{ab} e $\tilde{h}_{ab} = h_{ab} + \partial_a v_b + \partial_b v_a$ são na verdade equivalentes, pois a única coisa que mudamos entre a primeira e a segunda foi o sistema de coordenadas que escolhemos para escrever a perturbação. Esta simetria é inteiramente análoga à simetria de calibre no eletromagnetismo. Assim, podemos escolher uma mudança de coordenadas (um “calibre”) gerada por v^a de tal forma que

$$\partial_c \partial^c v_a = -\partial^b \bar{h}_{ab} \quad (9)$$

Com esta mudança de coordenadas, ou escolha de calibre, o tensor de Einstein é simplesmente:

$$G_{ab} \approx -\frac{1}{2}\partial_c \partial^c \bar{h}_{ab} \quad (10)$$

A escolha de calibre (9) é análoga à escolha do calibre de Lorentz $\partial_a A^a = 0$ em eletromagnetismo. De fato, a condição equivalente à escolha do sistema de coordenadas no qual (9) vale é impor sobre as flutuações da métrica a condição:

$$\partial^b \bar{h}_{ab} = 0. \quad (11)$$

De onde podemos ver facilmente que (6) se reduz a (10). Esta escolha é normalmente chamada de *calibre transverso*.

Neste calibre, as *equações linearizadas de Einstein* são, assim:

$$-\frac{1}{2}\partial_c \partial^c \bar{h}_{ab} = 8\pi G_N T_{ab} \quad (12)$$

Limite Newtoniano; Radiação Gravitacional

Unidades Geometrizadas

Como vimos na parte anterior destas notas de aula, as equações de Einstein implicam que a energia de um corpo está intimamente ligada à deformação geométrica do espaço. Mais ainda, o princípio da equivalência dita que todas as formas de energia devem deformar o espaço da mesma maneira, isto é, criando a mesma curvatura.

Isto significa que a presença da constante G_N nas equações de Einstein e em (12) é espúria. Poderíamos ter escolhido unidades de energia nas quais $G_N = 1$, assim como escolhemos unidades de tempo e espaço na qual $c = 1$. Poderia-se ir além e conjecturar que na verdade o paralelo com a relatividade restrita é válido e que energia possuiria o mesmo caráter, assim como tempo e espaço são na verdade a mesma coisa. Ficaremos com a primeira interpretação,

contudo. Nas nossas *unidades geometrizadas*, com a constante da gravitação universal $G_N = 1$, a massa terá a mesma dimensão do comprimento,

$$[G_N] = \frac{[F][L]^2}{[M]^2} = \frac{[L]^3}{[T]^2[M]} = \frac{[L]}{[M]} \quad (13)$$

que se tornará assim a única unidade dimensional necessária. Dito de outra forma, escolheremos apenas a unidade de comprimento, por exemplo o metro (m) e nestas unidades, o tempo será dado por metros e a massa será dada em metros. Os fatores de conversão são $1 \text{ m} \approx 3,33 \times 10^{-9} \text{ s}$ (o tempo que a luz leva para percorrer um metro) e $1 \text{ m} \approx 7,41 \times 10^{-28} \text{ kg}$ (a massa necessária para causar uma aceleração de $1 \text{ m}^{-1} \approx 1,11 \times 10^{-17} \text{ m/s}^2$ a 1 m de distância).

Às vezes, torna-se necessário relacionar o resultado de cálculos executados em unidades geometrizadas com unidades usuais com as do SI. Para isto segue a tabela com os fatores de conversão:

Quantidade	Dimensão Usual	Dimensão Geometrizada	Fator de Conversão
Aceleração	$[L][T]^{-2}$	$[L]^{-1}$	c^{-2}
Comprimento	$[L]$	$[L]$	1
Carga Elétrica (CGS)	$[L]^{3/2}[T]^{-1}[M]^{1/2}$	$[L]$	$G^{1/2}/c^2$
Densidade de Massa	$[L]^{-3}[M]$	$[L]^{-2}$	G/c^2
Densidade de Energia	$[L]^{-1}[T]^{-2}[M]$	$[L]^{-2}$	G/c^4
Energia	$[L]^2[T]^{-2}[M]$	$[L]$	G/c^4
Força	$[L][T]^{-2}[M]$	1	G/c^4
Massa	$[M]$	$[L]$	G/c^2
Momento Angular	$[L]^2[T]^{-1}[M]$	$[L]^2$	G/c^3
Pressão	$[L]^{-1}[T]^{-2}[M]$	$[L]^{-2}$	G/c^4
Tempo	$[T]$	$[L]$	c
Velocidade	$[L][T]^{-1}$	1	G/c^3

Para obter o resultado desejado em unidades usuais, basta multiplicar o resultado em unidades geometrizadas pelo fator de conversão. Doravante faremos $G_N = 1$, e retornaremos à unidades usuais quando houver necessidade.

O Limite Newtoniano

Conforme dissemos na introdução, a relatividade geral é uma tentativa de unir o princípio da relatividade restrita com a lei da gravitação universal. Da mesma maneira que a mecânica relativística se reduz à mecânica newtoniana a baixas velocidades, a relatividade geral deve implicar a gravitação newtoniana em um limite preciso.

Precisaremos, então, de uma série de hipóteses sobre a nossa distribuição de matéria de modo a formalizar a idéia de “partículas não-relativísticas.” Para isto, imaginemos uma distribuição de partículas cujas componentes espaciais das velocidades são pequenas $\mathbf{v} \ll c$. Obviamente estamos implicitamente escolhendo um referencial que mede tais componentes, então chamemos o vetor tangente à trajetória deste referencial de t^a .

Para que o sistema continue “a baixas velocidades”, a gravitação não pode ser muito forte, o que implica que as nossas fontes de matéria-energia têm de ser esparsas. A densidade de energia,

$$\rho = t^a T_{ab} t^b \quad (14)$$

será então pequena, e dominada pela contribuição da energia de repouso das partículas, isto é, da massa. Outra requisição que faremos, com o mesmo espírito de limitar a força da gravitação, é que haja pouca interação entre as partículas, o que implica que a pressão do nosso sistema seja negligível. Isto implica que podemos “concentrar” ou “dispersar” nossa distribuição de matéria sem custo de energia, que é o que se espera de partículas livres. Conforme vimos na demonstração do tensor de energia-momento para um fluido perfeito, a pressão está relacionada às componentes espaciais do tensor de energia-momento. Assim, podemos resumir esta condição em

$$T_{ij} \approx 0. \quad (15)$$

onde usamos i, j para representar as componentes espaciais. Isto implica, junto com a equação anterior, que a forma do tensor energia-momento será:

$$T_{ab} \approx \rho t_a t_b \quad (16)$$

com ρ igual à densidade de massa do sistema. Esta forma é igual à que obtivemos para um fluido perfeito

$$T_{ab} = \rho t_a t_b + P(g_{ab} + t_a t_b) \quad (17)$$

com $P = 0$. Esta forma do tensor de energia-momento é muitas vezes chamada de “poeira” no jargão de cosmologia. Muitas vezes a condição de não haver pressão no nosso sistema é referida como distribuição de matéria “sem stress.”

Para uma distribuição de matéria da forma (16) as equações linearizadas se simplificam ainda mais. De (12)

$$-\frac{1}{2}\partial_c \partial^c \bar{h}_{ab} = 8\pi G_N T_{ab} \quad (18)$$

Vemos que podemos escrever

$$\bar{h}_{ab} = -4\phi t_a t_b. \quad (19)$$

Que implica, pela condição de calibre (11), que a função ϕ é na verdade independente do tempo:

$$\partial^a \bar{h}_{ab} = -4t_b t^a \partial_a \phi = -4t_b \dot{\phi} = 0 \quad (20)$$

Assim a perturbação da métrica será da forma

$$h_{ab} = -(4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi. \quad (21)$$

E o “potencial gravitacional” ϕ satisfará a equação de Poisson:

$$\partial_a \partial^a \phi = -\ddot{\phi} + \nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi = 4\pi\rho. \quad (22)$$

Isto, por sua vez, implica que o 3-vetor $\mathbf{G} = -\nabla\phi$ satisfaz a Lei de Gauss, e que ϕ apresenta uma queda com a primeira potência da distância, a marca da lei da gravitação newtoniana.

Note que a escolha de calibre também acarretam a lei de conservação do tensor energia-momento. De fato, em uma métrica plana, esta lei é:

$$\nabla_a T^{ab} \approx \partial_a T^{ab} = \partial_a (\rho t^a t^b) = (t^a \partial_a \rho) + \rho t_b \partial_a t^a + \rho t^a \partial_a t^b \quad (23)$$

onde o segundo e o terceiro termos da última equação se anulam pois t^a é um vetor de Killing da métrica plana (este vetor representa translações temporais), e t^a também é um vetor geodésico, pois o referencial que segue suas curvas integrais é um referencial inercial. Pode-se também ver este fato algebricamente, e talvez mais facilmente, pois no sistema de

coordenadas que escolhemos t^a tem componentes constantes, e sua derivada parcial deve se anular de qualquer forma. A lei de conservação do tensor de momento-energia então implica que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} t_b = 0 \quad (24)$$

o que é consequência da nossa escolha de calibre. Obviamente, estas equações são válidas apenas no limite de gravitação fraca.

Para termos certeza de que a função ϕ acima realmente representa o potencial gravitacional newtoniano, temos que encontrar a equação de movimento de uma partícula sob a ação de uma perturbação pequena da métrica como a acima. Obviamente, a partícula seguirá uma geodésica no espaço-tempo, mas temos que tomar cuidado pois a gravitação newtoniana só é válida no limite não relativístico. Isto quer dizer que o vetor velocidade v^a de tal partícula será quase paralelo ao vetor t^a que representa nosso sistema de coordenadas, sob o qual as fontes de gravitação estão em repouso. Isto significa que neste referencial, o vetor velocidade será:

$$v^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \right) \approx (1, \mathbf{v}) \quad (25)$$

a menos de termos quadráticos da velocidade. Escrevendo a equação da geodésica:

$$\frac{dv^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu v^\nu v^\rho = 0 \quad (26)$$

vemos que as componentes importantes dos símbolos de Christoffel são Γ_{tt}^μ e Γ_{ti}^μ , pois os termos com estas serão ao menos da mesma ordem de magnitude que a velocidade. Ainda sob a mesma aproximação podemos substituir o tempo próprio pelo “tempo universal” t . Vamos então calcular os símbolos de Christoffel diretamente a partir de (3) e (21):

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= -\partial_t \phi = 0, & \Gamma_{ti}^t &= -\partial_i \phi \\ \Gamma_{tt}^i &= \partial_i \phi, & \Gamma_{tj}^i &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Então as componentes espaciais da equação da geodésica será, em primeira ordem:

$$\frac{dv^i}{dt} \approx -\Gamma_{00}^i = \partial_i \phi \quad (28)$$

ou seja, enquanto o lado esquerdo é a aceleração da partícula, o lado direito nos dá a força advinda de um potencial gravitacional ϕ . Desta forma recuperamos a lei da gravitação universal de Newton a partir da relatividade geral.

Vamos agora considerar fontes de matéria que se movem com pequena velocidade em relação ao referencial observador t^a . Podemos então aproximar o tensor de energia-momento, cuja forma é ainda da forma (16), por:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b = \rho(t_a + v_a)(t_b + v_b) \approx 2\rho t_{(a} v_{b)} + \rho t_a t_b \quad (29)$$

onde u_a é a quadrivelocidade das partículas massivas, enquanto as suas componentes espaciais v_a são pequenas. O 3-vetor $J_i = \rho v_i$ é chamado de *corrente de matéria*. Com a definição

$$\bar{h}_{tt} = 2\phi, \quad \bar{h}_{ti} = 2A_i \quad (30)$$

as equações linearizadas de Einstein são reduzidas a

$$(-\partial_t^2 + \nabla^2)\phi = -8\pi\phi, \quad (-\partial_t^2 + \nabla^2)\mathbf{A} = -8\pi\mathbf{J}. \quad (31)$$

e a condição de calibre (11):

$$\partial^c \bar{h}_{ct} = -\partial_t \phi + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (32)$$

que o leitor pode constatar como as equações de Maxwell para os potenciais escalares e vetor, e a condição de calibre de Lorentz.

Radiação Gravitacional

A equação da gravitação linearizada (12):

$$-\frac{1}{2} \partial_c \partial^c \bar{h}_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (33)$$

junto com a condição de calibre

$$\partial^b \bar{h}_{ba} = 0 \quad (34)$$

são extremamente parecidas com as equações de Maxwell para o quadripotencial vetor A_μ na presença de uma distribuição de carga-corrente J_μ :

$$\partial^c \partial_c A_\mu = 4\pi J_\mu \quad (35)$$

válida no calibre de Lorentz $\partial^b A_b = 0$. Isto nos leva a conjecturar se não há, na gravitação de Einstein, um fenômeno análogo à radiação eletromagnética. De fato, pode-se achar soluções propagantes das equações linearizadas de Einstein, que são geradas pela aceleração de corpos massivos, assim como a radiação eletromagnética é gerada a partir da aceleração de cargas.

Assim como no eletromagnetismo, contudo, o fenômeno da radiação acontece na ausência de matéria. Nestas condições pode-se usar a simetria restante de mudança de coordenadas para reduzir ainda mais o número de graus de liberdade que a gravitação linearizada possui. Como se viu acima, usou-se a simetria $h_{ab} \rightarrow h_{ab} + \partial_a v_b + \partial_b v_a$ para impor o calibre transversal:

$$\partial^b \bar{h}_{ba} = 0 \quad (36)$$

Porém isto ainda deixa ambíguo algumas transformações de coordenadas para as quais $\nabla_a \nabla^a v^b = 0$. De fato, sob a transformação acima, a variação de \bar{h}_{ab} será

$$\delta \bar{h}_{ab} = \partial_a v_b + \partial_b v_a - \eta_{ab} \partial_c v^c \quad (37)$$

E assim a condição de calibre muda conforme

$$\delta(\partial^a \bar{h}_{ab}) = \partial^a \partial_a v_b + \partial^a \partial_b v_a - \partial_b \partial_c v^c = \partial^a \partial_a v_b, \quad (38)$$

que se mantém desde que usemos transformações de coordenadas com $\partial^a \partial_a v^b = 0$, ou seja, cada componente do vetor v^a é solução da equação de onda. Note que, pelas equações linearizadas de Einstein no vácuo,

$$G_{ab} = -\frac{1}{2} \partial^c \partial_c \bar{h}_{ab} = 8\pi T_{ab} = 0 \quad (39)$$

todas as componentes da perturbação da métrica são soluções da equação de onda. Assim, podemos usar a simetria residual para cancelar algumas das componentes de h_{ab} . Costumeiramente se escolhem as componentes $h_{ti} = 0$ e o traço $h_a^a = 0$. Com estas a condição de calibre (11) nos diz que $\partial_t h_{tt} = 0$, o que implica, além das anulações acima, que $h_{tt} = 0$ se não houver fontes de matéria no nosso espaço-tempo. As condições

$$\partial^a h_{ab} = 0, \quad h_{t\mu} = 0, \quad h_c^c = 0 \quad (40)$$

são normalmente chamadas de *calibre de radiação*.

Como dissemos, as equações linearizadas de Einstein para as componentes não-nulas da perturbação da métrica serão assim equações de onda, cujas soluções são as bem conhecidas funções trigonométricas:

$$h_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} e^{ik_\rho x^\rho} \quad (41)$$

com $k_\rho k^\rho = 0$ e $H_{\mu\nu}$ constantes. As condições de calibre implicam

$$k^\mu H_{\mu\nu} = 0, \quad H_{t\mu} = 0, \quad H^\mu{}_\mu = 0 \quad (42)$$

E, como as duas primeiras condições implicam $H_{t\mu} k^\mu = 0$, estas equações somam 8 condições linearmente independentes sobre as 10 coordenadas de $h_{\mu\nu}$. A radiação gravitacional possui assim **duas** polarizações distintas, como a radiação eletromagnética. Por exemplo, para uma onda que se propaga na direção z , as componentes do vetor k^a serão $k^\mu = (1, 0, 0, 1)$. As componentes distintas de $H_{\mu\nu}$ serão:

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & A_\times & 0 \\ 0 & A_\times & -A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (43)$$

O subscrito dos dois tipos de polarização têm sua razão de ser na deformação do espaço tempo que eles trazem. Veja a Figura 2 para a evolução da geometria de uma distribuição circular de partículas sujeitas à radiação gravitacional.

Figura 2: Os dois tipos de polarizações gravitacionais. Clique nas figuras para ver as animações. À esquerda, a tipo “mais”, e à direita, a tipo “cruz”. Figuras retiradas de Wikipedia.org.

O tópico de radiação gravitacional e sua detecção é vasto e vai além da relatividade geral. O leitor interessado está convidado a ler as secções relevantes em [1].

Energia e Momento

Como se viu no capítulo sobre geodésicas, a suposição que a gravitação é um efeito na métrica do espaço-tempo nos faz abandonar, em geral, a noção de que há quantidades conservadas no movimento de partículas. De fato, apenas quando o espaço-tempo é especial, isto é, admite uma quantidade de isometrias às quais podemos associar cargas conservadas. Por

exemplo, vimos que apenas quando o nosso espaço-tempo admite uma isometria gerada por um vetor tipo tempo, que podemos interpretar como geratriz das “translações temporais”, é que podemos falar de energia conservada.

Isto é uma situação diametralmente oposta ao resto das teorias fundamentais. No eletromagnetismo, por exemplo, o teorema de Poynting nos certifica que a energia gasta por um sistema de cargas em movimento é emitida integralmente na forma de radiação eletromagnética. Não existe tal conceito em relatividade geral, pois as medições de “energia” e “momento” são quantidades que dependem do sistema referencial que utilizamos, e só tem sua interpretação usual quando usamos um referencial inercial, isto é, geodésico.

Pode-se contudo, em um espaço cuja gravitação é fraca e localizada, assumir que há um referencial inercial, que observa os eventos da gravitação a uma distância grande das fontes de matéria-energia. Tal referencial seria o mais próximo que poderíamos ter de um referencial geodésico, e tais quantidades como energia e momento poderiam ter valor intrínseco como as quantidades (energia e momento) medidas por tal referencial. A métrica sob a qual este referencial evolui está longe da fonte de gravitação e será assim uma métrica aproximadamente plana. Vamos assumir que esta métrica é a métrica de Minkowski, e a prova (incompleta) deste fato pode ser encontrada no capítulo 8 de [6].

Conforme vimos nas seções acima, o desvio entre a métrica real e a métrica de Minkowski será pequeno a grandes distâncias da fonte, e assim podemos, como fizemos acima, escrever:

$$g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}. \quad (44)$$

E a linearização do tensor de Einstein nos resulta (6):

$$G_{ab} \approx \left(-\frac{1}{2} \partial^c \partial_c \bar{h}_{ab} + \partial^c \partial_{(a} \bar{h}_{b)c} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{h}_{cd} \right) \quad (45)$$

Com a distinção de que agora só requeriremos que h_{ab} seja “pequeno” a uma grande distância espacial da fonte. Quando h_{ab} for consideravelmente maior que a métrica de Minkowski, a aproximação linear usada para calcular o tensor de Einstein acima não será mais válida, mas felizmente a expressão completa não nos será necessária.

Lembremos agora a lição da formulação de Einstein da gravitação: o acoplamento entre matéria e geometria se dá por meio da simetria que um sistema físico possui da escolha do sistema de coordenadas que usamos para o representar. Em teorias físicas lagrangianas, a esta simetria podemos associar uma quantidade conservada, o tensor de energia-momento T_{ab} . A pergunta que se faria a este momento é *qual é o tensor energia-momento da relatividade geral?* Ora, a relatividade geral inclui, de forma intrínseca, a invariância por transformações de coordenadas. Seguindo a receita dada na parte anterior destas notas, poderíamos obter o tensor de energia-momento da gravitação a partir de um formalismo lagrangiano.

A resposta pode ser consultada em outros livros (veja cap. 8 de [6]), mas para este curso é suficiente dizer que o tensor energia-momento da relatividade geral é *o próprio tensor de Einstein*. Explicando este fato com um exemplo: o nosso referencial “absoluto”, que está longe de nossas fontes de gravitação associaria a perturbação linearizada do tensor de Einstein (6) o tensor de energia-momento associado à gravitação, desde que a perturbação fosse h_{ab} fosse pequena onde o referencial a estivesse medindo.

A partir deste fato, vamos trabalhar em uma definição prática do que este referencial “absoluto” chamaria de “energia” e “momento” associado às fontes gravitacionais. Buscamos aqui o análogo da Lei de Gauss para o eletromagnetismo, que nos diz a quantidade de carga em uma região do espaço se soubermos o fluxo de campo elétrico que sai desta região. Suponha

que possamos escrever (6) como uma derivada de um tensor de terceira ordem:

$$G_{bc} = \partial^a Q_{abc} \quad (46)$$

Com Q_{abc} antisimétrico nos dois primeiros índices $Q_{abc} = -Q_{bac}$. Por outro lado, para um observador que segue um referencial v^a , o vetor densidade de energia-momento de uma distribuição de matéria com tensor T_{ab} será dado por $p_a = T_{ab}v^b$. Assim, imaginaria-se que a simples integral deste valor por todo o espaço nos resultará o vetor energia-momento da nossa distribuição de matéria:

$$P^a = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x p^a, \quad (47)$$

onde o elemento de volume é normal a v^a . Isto é obviamente uma suposição ingênua, pois como o espaço é curvo, a integral acima não é invariante por transformações de coordenadas. No entanto, isto funciona para nossos propósitos pois podemos, com a ajuda de (46), transformar a integral acima em uma integral de superfície, onde o referencial v^a é o nosso vetor tipo tempo do referencial “absoluto” e a métrica é minkowskiana. De fato, se (46) vale,

$$P^a = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x (\partial_c Q^{cba}) t_b = \frac{1}{8\pi} \int_V d^3x \partial_i Q^{ita} \quad (48)$$

onde supomos que o vetor t^a tem componentes constantes, como na métrica de Minkowski, e, como Q^{abc} é antisimétrico, apenas as componentes espaciais contribuem para o divergente. Podemos agora usar o teorema de Gauss para definir:

$$P^\mu = \frac{1}{8\pi} \int Q^{it\mu} n_i r^2 d\Omega \quad (49)$$

onde a integral é tomada sobre uma esfera de raio r com elemento de ângulo esférico $d\Omega$ e com vetor unitário apontando para fora n^i . Este é o vetor energia-momento que nosso referencial absoluto associaria para a nossa distribuição de massa. A única lacuna que devemos preencher para tornar esta definição plausível é mostrar que o tensor Q^{abc} definido por (46) é bem definido. Na aproximação de gravitação linearizada, temos:

$$Q^{abc} \equiv \frac{1}{2} (\eta^{ac} \partial^b h_d^d - \eta^{bc} \partial^a h_d^d - \eta^{ac} \partial_d h^{db} + \eta^{bc} \partial_d h^{da} + \partial^a h^{bc} - \partial^b h^{ac}) \quad (50)$$

que com certeza satisfaz todos os requisitos.

Para sermos explícitos, as componentes do vetor energia-momento sob as hipóteses acima serão:

$$\begin{aligned} E = P^0 &= \frac{1}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int \left(\frac{\partial h_{ij}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ii}}{\partial x^j} \right) n^j r^2 d\Omega \\ P^i &= \frac{1}{16\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \int \left(-\frac{\partial h_{kk}}{\partial t} \delta_j^i + \frac{\partial h_{kt}}{\partial x^k} \delta_j^i - \frac{\partial h_t^i}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} \right) n^j r^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (51)$$

Mais uma vez, a definição de tais quantidades conservadas em geral é um problema em aberto e dependerá das distribuição assintótica de matéria. O leitor interessado é convidado a ler os capítulos sobre platitude assintótica dos livros [6] e [8]. Tais quantidades são chamadas de *massa ADM* na literatura, em homenagem a seus descobridores Arnowitt, Deser e Misner.

Referências

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc (1972).
- [2] Jean-Philippe Uzan, *The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 403, [[arXiv:hep-ph/0205340](#)].
- [3] V. I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir, 1985; alternativamente, pode-se consultar do mesmo autor *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, (1989), §18;
- [4] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides – LTC (1988);
- [5] L. Landau e E. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 2: Teoria do Campo*, Editora Mir, (1980);
- [6] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [7] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, [[arXiv:gr-qc/9712019](#)], ou *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).
- [8] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).