Introdução à Relatividade Geral

Notas de aula por Bruno Carneiro da Cunha

Parte 5: A gravitação de Einstein

Contrações; Espaços Maximalmente Simétricos

A partir das identidades de Bianchi, podemos construir tensores derivados do tensor de Riemann, que possuem características interessantes no que se segue. A primeira definição é o *tensor de Ricci*, obtido a partir da contração entre dois dos índices do tensor de Riemann:

$$R_{ac} = R_{abc}{}^{b} \tag{1}$$

e contraindo o tensor de Ricci com a (inversa da) métrica, temos a *curvatura escalar*:

$$R = g^{ac} R_{ac} \tag{2}$$

O tensor de Riemann pode então ser decomposto em sua "parte traço" e a parte de "traço zero":

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} - g_{b[c}R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R\ g_{a[c}g_{d]a} \tag{3}$$

Onde o tensor C_{abcd} é chamado de *tensor de Weyl* ou *tensor conforme* e possui a propriedade que resulta zero se quaisquer duas componentes forem contraídas com a métrica. Tal decomposição só faz sentido se $n \geq 3$, pois neste caso ambos os tensores de Ricci e Weyl são diferentes de zero.

Chamamos espaços nos quais o tensor de Riemann só depende de um valor:

$$R_{abcd} = \frac{2}{n(n-1)} R\ g_{c[a}g_{b]d} \tag{4}$$

de *espaços maximalmente simétricos*. Tais espaços são interessantes pois admitem o mesmo número de simetrias do espaço euclideano (que também é um espaço maximalmente simétrico, com curvatura escalar $R = 0$). Como veremos adiante, a segunda identidade de Bianchi requer que a curvatura escalar R seja uma constante para espaços maximalmente simétricos.

Vamos listar aqui, para futura referência, os espaços riemannianos maximalmente simétricos (maximalmente extendidos) tridimensionais, cujo elemento de linha dependem do sinal da curvatura escalar:

$R = 0$: Neste caso podemos tomar o espaço como euclideano:

$$d\bar{s}_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{5}$$

$R < 0$: Neste caso o espaço é dito *hiperbólico*:

$$d\bar{s}_-^2 = \ell^2(d\chi^2 + \cosh^2\chi\ d\theta^2 + \cosh^2\chi \,\mathrm{sen}^2\theta\ d\phi^2) \tag{6}$$

A curvatura escalar aqui é $R = -6/\ell^2$.

$R > 0$: Neste caso o espaço é dito *esférico*:

$$d\bar{s}_{+}^{2} = \ell^{2}(d\theta^{2} + \mathrm{sen}^{2}\theta\; d\phi^{2} + \mathrm{sen}^{2}\theta\,\mathrm{sen}^{2}\phi\; d\psi^{2}) \tag{7}$$

A curvatura é $R = +6/\ell^{2}$.

A demonstração de que um espaço maximalmente simétrico está em um dos casos acima é extensa e está além deste curso de introdução. A prova consiste em uma parte fácil, que é demonstrar a existência local de um sistema de coordenadas (coordenadas normais de Gauss) em que a métrica é dada por um dos casos acima, e uma parte difícil, que consiste em "continuar" o espaço além deste sistema de coordenadas. O que se pode fazer de forma mais direta é demonstrar que os espaços acima têm de fato o tensor de Riemann covariantemente constante:

$$\nabla_{a} R_{bcd}{}^{e} = 0 \tag{8}$$

o que implica que o tensor de Riemann é da forma (4), com R constante. Isto pode ser feito diretamente a partir da definição do tensor de Riemann a partir da conexão e será deixada como exercício. Veja os exercícios 6 do Capítulo 4 e 14 do Capítulo 8 de [4] para detalhes[1].

Por último, mas não menos importante, podemos definir, a partir do tensor de Ricci e da curvatura escalar o *tensor de Einstein*:

$$G_{ac} = R_{ac} - \frac{1}{2} R g_{ac} \tag{9}$$

O tensor de Einstein satisfaz uma propriedade importantíssima do ponto de vista físico. Para demonstrá-la, partiremos da segunda identidade de Bianchi:

$$\nabla_{a} R_{bcd}{}^{e} + \nabla_{b} R_{cad}{}^{e} + \nabla_{c} R_{abd}{}^{e} = 0 \tag{10}$$

e contraindo os índices $c - e$, teremos:

$$\nabla_{a} R_{bd} - \nabla_{b} R_{ad} + \nabla_{c} R_{abd}{}^{c} = 0 \tag{11}$$

agora, multiplicaremos a expressão acima com a inversa da métrica g^{ad} e contrairemos estes índices. A resposta será:

$$2\nabla^{a} R_{ab} - \nabla^{b} R = 2\nabla^{a} G_{ab} = 0 \tag{12}$$

ou seja, o tensor de Einstein é *covariantemente conservado*. Esta identidade será de suma importância na consistência das equações de Einstein.

O tensor de Energia-Momento

Passamos as últimas seções desenvolvendo um entendimento razoável de como quantificar a geometria do espaço-tempo, de forma a medir a aproximação de referenciais inerciais. Agora temos que discutir como esta geometria é modificada pela existência de matéria no universo. A primeira correção que devemos fazer à última sentença é que "matéria" é sinônimo na física relativística de "energia", então pergunta deve ser mudada para "como a matéria-energia deforma a geometria do espaço-tempo."

[1] Tenha o devido cuidado com a notação de [4]: o tensor de Riemann está lá representado por $R(X, Y)Z$, o que nós chamamos de $R_{abc}{}^{d} X^{a} Y^{b} Z^{c}$. A derivada covariante é representada por $\nabla_{X} Y$, sendo equivalente ao que chamamos de $X^{a}\nabla_{a} Y^{b}$.

A resposta para esta pergunta pode, de novo, ser encontrada no conceito de simetria. Estruturamos a geometria nos últimos capítulos de forma que ela não fosse alterada se mudássemos o sistema de coordenadas usado para representar o espaço-tempo. Formalmente, dois sistemas de coordenadas estão relacionados por um *difeomorfismo do espaço-tempo*, e as propriedades métricas mudam, segundo vimos, de forma covariante segundo tal mudança de coordenada. Por exemplo, vimos na seção sobre derivadas de Lie que a métrica muda por um "pull-back" quando aplicamos um difeomorfismo no espaço-tempo.

Vamos requerer da nossa matéria-energia então, que sua dinâmica seja governada pelo mesmo princípio: a *invariância por difeomorfismos*, ou por mudança de sistemas de coordenadas. Isto, ao menos à primeira vista, parece razoável: temos de fato uma idéia clara que uma partícula "está ali" sem a necessidade de menção a um sistema de coordenadas específicos. A formalização disto, entretanto, requer um certo traquejo matemático, que desenvolveremos nesta seção.

O ponto de partida para falar de simetrias em sistemas físicos é o formalismo lagrangeano. Recordemos o teorema de Nöther, que relaciona cada simetria contínua à uma carga conservada, que tem sua prova mais direta quando o sistema puder ser representado por uma função lagrangeana. De qualquer forma, tal formalismo é bem justificado para as forças fundamentais da natureza, além dos sistemas físicos que consideraremos, o que nos dá uma justificativa suficiente. Iniciaremos então da *densidade de lagrangeana* $\mathscr{L}$:

$$S = \int d^4x \, \sqrt{-\det g}\mathscr{L}(\phi, \nabla_a\phi) \tag{13}$$

onde ϕ_i são nossas coordenadas generalizadas. O termo $\sqrt{-\det g}$ é o jacobiano associado à métrica e necessário para que a *ação* seja invariante por transformações de coordenadas. Vamos agora estudar a variação da ação acima por um difeomorfismo a um parâmetro gerado por campo vetorial K^a. Das expressões para a derivada de Lie, temos:

$$\mathscr{L}_K S = \int d^4x \, \mathscr{L}_K(\sqrt{-g}\mathscr{L}(\phi, \nabla_a\phi)) = \int d^4x \left(\mathscr{L}_K\sqrt{-g}\mathscr{L} + \sqrt{-g}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\mathscr{L}_K\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_a\phi}\mathscr{L}_K\nabla_a\phi\right]\right) \tag{14}$$

onde expandimos o lado direito pela regra da cadeia. Apesar de não colocarmos explicitamente, há uma soma implícita no termo do lado direito. A chave para o que se segue é notar que a derivada de Lie sempre pode ser escrita em termos de derivadas covariantes usuais ∇_a. Por exemplo, quando as coordenadas generalizadas forem apenas funções do espaço-tempo, teremos:

$$\mathscr{L}_K\phi = K^a\nabla_a\phi, \qquad \text{e} \qquad \mathscr{L}_K\nabla_a\phi = K^b\nabla_b\nabla_a\phi + \nabla_b\phi\nabla_aK^b \tag{15}$$

E, a menos do primeiro termo que envolve a variação do jacobiano, sempre podemos, por meio de algumas integrações por partes e condições assintóticas nos campos que nos façam desprezar os termos de fronteira, e do uso das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = \nabla_a\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\nabla_a\phi} \tag{16}$$

escrever a variação da ação na forma:

$$S = \int d^4x \, \sqrt{-g}T^{ab}(\nabla_aK_b + \nabla_bK_a) = 2\int d^4x \, \sqrt{-g}T^{ab}\mathscr{L}_K g_{ab} \tag{17}$$

onde o tensor $T^{ab} = T^{ba}$ assim definido é, de fato, a corrente de Nöther associada à invariância por difeomorfismos. A equação de movimento nos diz que esta corrente é conservada, assim como o tensor de Einstein:

$$\nabla_a T^{ab} = 0. \tag{18}$$

Tal tensor é chamado de *tensor de energia-momento*.

Na discussão anterior, omitimos a discussão da variação do jacobiano por difeomorfismos. No que se segue introduziremos algumas ferramentas para facilitar o cálculo deste (e de outros) termos envolvendo a métrica. Antes de mais nada, vamos introduzir o *operador de variação* δ, que funcionará à mesma maneira que a variação de funções em cálculo funcional, ou seja, satisfará linearidade e a identidade de Leibnitz. Considere agora variações da métrica δg_{ab}. A identidade

$$g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c \tag{19}$$

tem variação nula. Expandindo a variação do lado esquerdo pela regra de Leibnitz, temos:

$$(\delta g^{ab})\ g_{bc} + g^{ab}\ \delta g_{bc} = 0 \tag{20}$$

ou seja,

$$\delta g^{ab} = -g^{ac}\ \delta g_{cd}\ g^{db} \tag{21}$$

que relaciona a variação da inversa da métrica com a variação de g_{ab}. A variação que queremos calcular depende do determinante da métrica, o qual escreveremos segundo a identidade:

$$\det g = \exp(\mathrm{Tr}(\log g)) \tag{22}$$

onde a função logaritmo é definida para funções por meio de sua expansão de Taylor. A fórmula acima pode ser vista diretamente para matrizes diagonalizáveis, como é o caso da matriz g_{ab}, que é simétrica, mas vale para qualquer matriz cujo determinante é não nulo (Veja §16.4 de [3] para o teorema preciso.) Usando a regra da cadeia nas variações de g, temos:

$$\delta \det g = \exp(\mathrm{Tr}(\log g))\mathrm{Tr}(\delta g\ g^{-1}) = \det g \delta g_{ab} g^{ab} \tag{23}$$

Note se assim que a variação do jacobiano por um difeomorfismo gerado por um campo vetorial pode ser colocado na forma (17) pois neste caso $\delta g_{ab} = \mathscr{L}_K g_{ab} = 2\nabla_{(a} K_{b)}$. Alternativamente, o teorema pode ser demonstrado usando a definição de matriz inversa como a transposta da matriz dos cofatores dividida pelo determinante. O cofator do elemento i, j de uma matriz é simplesmente o determinante da matriz cuja coluna i e a linha j são retiradas. Assim a derivada do determinante em relação ao elemento i, j da matriz será

$$\frac{\partial(\det g)}{\partial g_{ij}} = \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \sum_P (-1)^{\sigma(P)} g_{1\sigma_1} \cdot g_{N\sigma_N} = \det g\ g^{ji} \tag{24}$$

que implica a relação acima.

De posse da equação acima, podemos calcular o tensor de energia-momento para qualquer forma de matéria-energia que possa ser descrita por um lagrangeano. Tudo que precisaremos fazer é escrever este lagrangeano de forma a deixar a invariância explícita o que implica em escrever a função lagrangeana deste sistema em uma métrica genérica. Infelizmente não há um procedimento único para fazer isto, mas pode-se, a partir da formulação relativística de um sistema chegar a pelo menos uma lagrangeana com as propriedades requeridas por meio do que se chama de *acoplamento mínimo*. Vamos ilustrar este procedimento com dois exemplos.

A partícula livre

O primeiro é de uma partícula livre. Vimos na primeira parte destas notas de aula que a invariância galileiana nos impunha a forma da função lagrangeana de uma partícula livre como proporcional à energia cinética. Para uma partícula com invariância de Lorentz, temos que achar algo análogo. Uma partícula clássica segue uma trajetória no espaço-tempo e a única função que satisfaz a requisição de invariância de Lorentz é o comprimento, ou melhor, tempo-próprio, da trajetória:

$$S = m \int ds \, \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}} \tag{25}$$

onde a constante m pode ser achada a partir da expansão não-relativística da ação, e é assim igual à massa de repouso da partícula. O princípio da mínima ação vira assim o princípio do tempo próprio máximo e as equações de Euler-Lagrange da ação acima nos dará as trajetórias dos observadores inerciais. Note que a ação acima também é invariante segundo transformações de parâmetros $s \to s'(s)$.

O princípio do acoplamento mínimo nos permite definir uma ação para partículas livres em um espaço-tempo com uma métrica qualquer g_{ab}. Para defini-la note que o vetor velocidade segundo nossa definição não depende da métrica da partícula, sendo dada pela derivada das coordenadas. Assim, a nova ação será obtida pela substituição da métrica de Minkowski por uma métrica genérica $g_{\mu\nu}$:

$$S = m \int ds \, \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}}. \tag{26}$$

Para verificar que esta ação realmente nos leva a equações de movimento certas, vamos calcular a equação de Euler-Lagrange para a ação acima:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^\rho} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\rho}\right) &= -\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\rho\mu}\dot{x}^\mu}{\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}}\right). \end{aligned} \tag{27}$$

Expandindo a segunda equação e usando

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{dt} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\rho \tag{28}$$

juntamente com a condição de parametrização afim $g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -1$, temos, finalmente:

$$g_{\mu\rho} \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -g_{\mu\rho} \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta \tag{29}$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu$ são os símbolos de Christoffel associados à metrica $g_{\mu\nu}$. A equação escrita acima nada mais é que a equação da geodésica, conforme escrita na parte 3 destas notas. Assim a condição de acoplamento mínimo impõe, via o princípio da mínima ação (ou máximo tempo próprio) que as partículas livres percorrem trajetórias geodésicas no espaço-tempo. Isto é com certeza o resultado esperado para partículas livres.

O tensor energia momento pode ser calculado também de acordo com o procedimento geral dado em (17), com o entendimento que este tensor só está definido sobre a trajetória da partícula. Ao se mudar a métrica a variação da ação de uma partícula livre será dada por:

$$\delta S = m \int ds \, \frac{1}{2\sqrt{-g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta}} \delta g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \tag{30}$$

que, comparando com a definição nos dá:

$$T^{\mu\nu} = m\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} \tag{31}$$

onde salientamos que o ponto significa derivada em relação ao parâmetro s. Agora compare esta expressão com aquela definida a partir de argumentos heurísticos para um sistema de partículas livres, quando falávamos de fluidos perfeitos (veja a parte 1 das notas de aula):

$$T_{ab} = \sum_i \frac{p_a^{(i)} p_b^{(i)}}{p_0^{(i)}} \delta^{(3)}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(i)}(t)) \tag{32}$$

que é exatamente a mesma forma da expressão acima, quando o parâmetro s é a coordenada t do fluido. Daquele exercício chegamos à expressão do tensor energia-momento do fluido perfeito:

$$T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b + P\eta_{ab} \tag{33}$$

que pode ser traduzida da mesma forma para uma métrica genérica, pela prescrição do acoplamento mínimo:

$$T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b + P g_{ab} \tag{34}$$

onde agora $u_a = g_{ab}u^b$. A conservação deste tensor $\nabla_a T^{ab}$ nos dá as seguintes equações:

$$\begin{gathered} u^a \nabla_a \rho + (\rho + P)\nabla_a u^a = 0, \\ (P + \rho) u^a \nabla_a u^b + (g^{ab} + u^a u^b)\nabla_b P = 0 \end{gathered} \tag{35}$$

que são respectivamente as componentes de $\nabla_a T^{ab}$ paralelas e perpendiculares a u^a. No limite não relativístico, com $P \ll \rho$ e $u^\mu = (1, \mathbf{v})$, e métrica de Minkowski, estas equações se reduzem a:

$$\begin{gathered} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} \right) = -\nabla P \end{gathered} \tag{36}$$

onde as quantidades em negrito $\mathbf{v}, \nabla$ se referem a vetores "usuais" em três dimensões. A primeira das equações acima é chamada de *equação da continuidade* e a segunda de *equação de Euler*, que rege o comportamento de um fluido perfeito. Como se vê, ambas são consequência direta da lei de conservação associada à simetria de mudança de coordenadas.

Eletromagnetismo

O segundo exemplo que consideraremos é o do eletromagnetismo. A função lagrangiana que resulta nas equações de Maxwell é dada por

$$S_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4} \int d^4x \; F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{37}$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor de Faraday, definido em termos do 4-potencial vetor $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\mu - \partial_\nu A_\mu. \tag{38}$$

Vamos primeiro ver que as equações de Euler-Lagrange associadas a (37) são de fato as equações de Maxwell. Tomando a primeira variação da ação em relação a A^μ, temos:

$$\delta S_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \; F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = \int d^4x \; (\partial_\mu F^{\mu\nu}) \delta A_\nu \tag{39}$$

onde fizemos uma integração por partes no último termo, e desprezamos termos de fronteira. O que resulta

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} \tag{40}$$

é de fato metade das equações de Maxwell conforme vimos na primeira lista de exercícios. O segundo par advém do fato que, para qualquer potencial vetor:

$$\partial_{[\mu}\partial_\nu A_{\rho]} = \frac{1}{3}(\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu}) = 0 \tag{41}$$

o que na verdade tem uma relação íntima com a identidade de Bianchi para o tensor de Riemann. De qualquer forma, mostramos que (37) realmente implica nas equações de Maxwell no vácuo.

Para reescrever a função lagrangeana para métricas genéricas, notemos que a definição do tensor de Faraday é independente da derivada que usamos:

$$F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a = \partial_a A_b - C^c_{ab} A_c - \partial_b A_a + C^c_{ba} A_c = \partial_a A_b - \partial_b A_a \tag{42}$$

pois a condição de torção nula implica que a conexão seja simétrica. Assim, se tomarmos o 4-potencial como uma 1-forma, F_{ab} não varia com a métrica. Podemos então definir a lagrangeana de Maxwell em qualquer espaço com métrica g_{ab} como:

$$S_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}\int d^4x\ \sqrt{-g}\ F_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd} \tag{43}$$

com $F_{ab} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$. Calculando a variação desta ação segundo a métrica g_{ab}, teremos:

$$\delta_g S_{\text{Maxwell}} = -\frac{1}{4}\int d^4x\ \sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}g^{cd}F_{ab}F^{ab} - F^{cb}F^d{}_b - F^{bc}F_b{}^d\right)\delta g_{cd} \tag{44}$$

o que nos dá, segundo a definição (17), o *tensor energia-momento do eletromagnetismo*:

$$T_{ab} = F_a{}^c F_{cb} - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd} \tag{45}$$

que é realmente conservado pelas equações de Maxwell conforme vimos no caso minkowskiano na primeira lista de exercícios[2].

As equações de Einstein

Como vimos acima, a conservação do tensor energia-momento é consequência direta do requerimento que os sistemas físicos existam à revelia da caracterização que fazemos deles por meio de sistemas de coordenadas. A conservação de quantidades como energia e o momento é assim ligada de forma profunda à invariância do por parametrizações do espaço-tempo. Seja qual for o mecanismo pelo qual a presença de matéria no universo deforma sua geometria, ele deve satisfazer este critério.

Matematicamente, a requisição de invariância por transformações de sistemas de coordenadas significa invariância por difeomorfismos. De fato, todas as quantidades geométricas que consideramos têm leis de transformações por difeomorfismos bem definidas, e assim têm sua existência bem definida em qualquer sistemas de coordenadas. Como vimos anteriormente, a

[2]Pela definição do tensor de energia-momento, há um fator de 2 faltando de (45). Note que tal fator não altera a lei de conservação e é costumeiramente omitido da definição de T_{ab} para o campo eletromagnético.

geometria estará determinada pelo campo tensorial de Riemann, ${R_{abc}}^d$. Por exemplo, vimos que a aceleração $\nabla_b X^d$ resultante entre dois referenciais inerciais com separação infinitesimal ϵX^a será dada por ${R_{abc}}^d T^a T^c X^b$, e este é de fato um efeito com interpretação física direta e mensurável. Pelo princípio da equivalência, esta aceleração será a atração gravitacional entre os dois observadores.

Por outro a atração gravitacional depende da quantidade de matéria-energia entre os dois observadores, e esta é dada por $T^a T_{ab} T^b$. De alguma maneira esta quantidade deve estar associada com a quantidade acima. O Ansatz mais simples que mantém a invariância por escolha de coordenadas não pode envolver a separação X^a e assim podemos equiparar:

$$ {R_{abc}}^d T^a T^c = R_{ac} T^a T^c \stackrel{?}{=} 4\pi G_N T_{ac} T^a T^c $$

como isto deve ser válido para qualquer vetor geodésico T^a, isto implica em

$$ R_{ac} \stackrel{?}{=} 4\pi G_N T_{ac} $$

onde G_N é uma constante. Esta equação apresenta o problema de consistência, se tomarmos o gradiente do lado direito teremos 0 pela lei de conservação da energia-momento. O lado esquerdo, contudo, implicará em

$$ \nabla^a R_{ab} = \frac{1}{2} \nabla_b R $$

ou seja, a curvatura escalar é uma constante pelo espaço-tempo. Porém isto também implica em $\nabla_a T^b_b = \nabla_a T = 0$, o que pode ser facilmente violado por configurações simples de matéria. Por exemplo, a equação implica que teremos, para um fluido perfeito:

$$ \rho + 3P = \text{Constante} $$

O que não é verdade para qualquer conformação de fluido.

Para resolver este impasse, teremos então que tomar do lado geométrico das equações de Einstein algum tensor construído com base na métrica que satisfaça a mesma lei de conservação que o tensor de energia-momento. O candidato mais simples que temos até agora é o tensor de Einstein. Tomaremos então a equação

$$ G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi G_N T_{ab} \tag{46} $$

como a relação entre geometria e distribuição de energia. A constante G_N relacionará os dois, e, nas próximas aulas, veremos que esta é igual à constante da Lei da Gravitação Universal de Newton.

É importante salientar que as *equações de Einstein* (46) não invalida os argumentos que usamos para escrever as equações anteriores. De fato, se tomarmos o traço de (46), teremos:

$$ R = -8\pi G_N T \tag{47} $$

o que nos permite reescrever as equações de Einstein como:

$$ R_{ab} = 8\pi G_N \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) \tag{48} $$

que implica, para distribuições de matéria não-relativística $P \ll \rho \approx -T$, a equação anterior $R_{ab} T^a T^b \approx 4\pi T_{ab} T^a T^b$.

O conteúdo físico da Relatividade Geral é então o que se segue: *a física transcorre no espaço-tempo, uma variedade diferenciável com uma métrica Lorentziana de signatura* $(-, +, +, +)$. *A métrica é deformada pela presença de matéria segundo as equações de Einstein (46).* Este será o objeto de nosso estudo no restante deste curso.

Referências

[1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc (1972).

[2] Jean-Philippe Uzan, *The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 403, [arXiv:hep-ph/0205340].

[3] V. I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir, 1985; alternativamente, pode-se consultar do mesmo autor *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, (1989), §18;

[4] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides – LTC (1988);

[5] L. Landau e E. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 2: Teoria do Campo*, Editora Mir, (1980);

[6] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).

[7] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, [arXiv:gr-qc/9712019], ou *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).

[8] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).