Introdução à Relatividade Geral

Notas de aula por Bruno Carneiro da Cunha

Parte 4: Movimento e Curvatura

Geodésicas

Geodésicas são a melhor noção de "linha reta" em um espaço curvo. Como discutimos no início da aula passada, a idéia de "linha reta" é generalizada para espaço curvos com o nome de "curvas sem aceleração":

$$A^a = V^a \nabla_a V^b = 0 \tag{1}$$

onde V^a é um vetor tangente à trajetória da partícula. Note, porém, que em se tratando de espaço-tempo, a trajetória é a única coisa com significado físico bem definido. É a partir da trajetória que calculamos tempos ou distâncias próprias. Dada uma trajetória, há porém inúmeras maneiras de parametrizá-la. Vamos ilustrar essa redundância com um sistema de coordenadas. Dada uma curva (ou sequência de pontos) em determinada coordenadas:

$$P(s) = \{t(s), x(s), y(s), z(s)\} \tag{2}$$

As componentes do vetor velocidade serão dadas por:

$$V^\mu = \left\{ \frac{dt}{ds}, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\}. \tag{3}$$

Se escolhermos outra parametrização $s'(s)$ para nossa curva, a velocidade mudará por:

$$(V')^\mu = \frac{ds'}{ds} V^\mu \tag{4}$$

Ou seja, *para qualquer função* $f(s)$ as curvas cujas velocidades são $(V')^\mu = f(s)V^\mu$ são as mesmas!

Isto significa que (1) deve ser relaxado. Chamaremos então de *geodésica* a curva cujo vetor tangente satisfaz:

$$V^a \nabla_a V^b = \alpha V^b \tag{5}$$

para alguma função α.

Como, então, entender a equação (1), $\alpha = 0$ geometricamente? Como temos uma invariância por parametrizações, podemos multiplicar o vetor velocidade for um número distinto a cada ponto. Com isso podemos impor a condição de normalização $g_{ab}V^aV^b = \kappa$, onde κ é uma constante. Esta parametrização é chamada de *parametrização afim*. Nesse caso a condição (5) implica que:

$$0 = V^a \nabla_a (g_{bc} V^b V^c) = 2 g_{bc} V^b V^a \nabla_a V^c = 2\alpha\kappa \tag{6}$$

que implica $\alpha = 0$ e (1) quando a geodésica não for do tipo nulo. Note que a condição $\kappa = -1$ implica por sua vez que estamos usando o tempo próprio da partícula para parametrizar sua trajetória, conforme vimos nas partes anteriores.

O caso de geodésicas do tipo nulo ($\kappa = 0$) merece uma atenção em separado. Estas geodésicas são de suma importância pois sobre elas viajarão raios de luz, ou qualquer outra partícula sem massa. Como vimos acima, não há nesse caso um "tempo próprio" pelo qual podemos parametrizar a trajetória da partícula. Ainda assim podemos escolher uma parametrização afim, em que (1) é satisfeita.

Coloquemos a equação (1) em termos de coordenadas. Pela definição de derivada covariante:

$$V^a \nabla_a V^b = V^a \partial_a V^b + C^b_{ac} V^a V^c = 0, \tag{7}$$

e, vendo que a contração $V^a \partial_a$ é a derivada direcional das funções $V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ na direção de V^a, escrevemos:

$$\frac{dV^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} V^\nu V^\rho = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \tag{8}$$

Onde $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}$ são os símbolos de Christoffel, definidos na seção passada. Note que esta equação é uma equação diferencial não linear de segunda ordem, e sua solução em geral é difícil.

Vetores de Killing

Além dos difeomorfismos de "translação", que muda o valor das coordenadas, há outra classe de transformações de suma importância para a relatividade, as *isometrias*. As isometrias são difeomorfismos, ou seja, aplicações do espaço-tempo no espaço-tempo, que mantém a métrica invariante. No caso de difeomorfismos infinitesimais, que são gerados por um campo vetorial ξ^a, esta condição se traduz na derivada de Lie da métrica:

$$\mathscr{L}_\xi g_{ab} = 0 \tag{9}$$

Da relação entre a derivada de Lie e a derivada covariante, temos:

$$\mathscr{L}_\xi g_{ab} = \xi^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a \xi^c + g_{ac} \nabla_b \xi^c = 0. \tag{10}$$

E a condição de compatibilidade entre a derivada covariante e a mética nos leva à *equação de Killing*:

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \tag{11}$$

onde $\xi_a = g_{ac}\xi^c$ é a 1-forma associada ao campo vetorial ξ^c. Soluções da equação de Killing (11) são chamados *vetores de Killing*. Os vetores de Killing são então os geradores de isometrias do espaço-tempo.

Nem sempre poderemos achar soluções de (11), pois o espaço-tempo geral não possui nenhuma simetria. No caso em que podemos achá-las, podemos resolver mais facilmente a equação da geodésica (1). Isto se deve ao seguinte fato:

Se ξ^a é um vetor de Killing, então para qualquer geodésica em que V^a satisfaz (1), então a função $g_{ab}\xi^a V^b$ é constante na trajetória da geodésica.

A derivada direcional da função na direção da geodésica é dada por:

$$V^a \nabla_a (g_{bc} \xi^b V^c) = V^a \nabla_a (\xi_c V^c) = V^a V^c \nabla_a \xi_c + \xi_c V^a \nabla_a V^c. \tag{12}$$

Note que o último termo se anula pela condição (1). Quanto ao outro termo, temos:

$$\begin{aligned} V^a V^c \nabla_a \xi_c &= \frac{1}{2} V^a V^c \nabla_a \xi_c + \frac{1}{2} V^a V^c \nabla_a \xi_c \\ &= \frac{1}{2} V^a V^c \nabla_a \xi_c + \frac{1}{2} V^c V^a \nabla_c \xi_a \\ &= \frac{1}{2} V^a V^c (\nabla_a \xi_c + \nabla_c \xi_a) \end{aligned} \tag{13}$$

que também se anula pela equação de Killing (11). Este pode ser visto como resultado direto do teorema de Nöther: a cada simetria da dinâmica podemos associar uma quantidade conservada.

Quando há isometrias suficientes no espaço, podemos transformar a equação da geodésica (8) em uma equação diferencial de primeira ordem. A situação aqui é análoga a sistemas sem dependência explícita do tempo na mecânica clássica: ali podemos resolver uma equação de segunda ordem, a segunda lei de Newton, por meio de uma equação de primeira ordem, a da conservação da Energia. Neste último caso, temos que escolher uma constante de integração, a energia total do sistema. No nosso caso, lembre-se que para demonstrar a constância da função $\xi_c V^c$, precisávamos assumir a equação (1), que por sua vez depende da constância da norma do vetor V^a. Este valor pode ser positivo, zero ou negativo conforme a geodésica for do tipo espaço, nula, ou tempo, respectivamente. A redução será feita, então, com base na condição $g_{ab}V^aV^b = \kappa$.

Vamos ilustrar esta conta com o exemplo da 2-esfera S^2. Os símbolos de Christoffel da esfera foram calculados na parte anterior destas notas de aula:

$$\begin{aligned}\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} =\Gamma^\theta{}_{\phi\theta} = \Gamma^\theta{}_{\theta\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi\phi} = 0,\\ \Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\operatorname{sen}\,\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi{}_{\phi\theta} = \Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}.\end{aligned} \tag{14}$$

Agora mostremos que o campo vetorial $\Phi^a = (\partial_\phi)^a$ é de Killing. A 1-forma associada a este campo vetorial é $\Phi_b = g_{ab}\Phi^a = \operatorname{sen}^2\theta(d\phi)_b$. A derivada covariante desta 1-forma é:

$$\begin{aligned}\nabla_a\Phi_b &= \partial_a\Phi_b - C^c{}_{ab}\Phi_c\\ &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(d\theta)_a(d\phi)_b - \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\operatorname{sen}^2\theta[(d\theta)_a(d\phi)_b + (d\phi)_a(d\theta)_b]\\ &= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}\end{aligned} \tag{15}$$

onde introduzimos as chaves entre os índices para denotar antisimetrização: em geral $A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$. Como esta derivada é antisimétrica, então $\nabla_a\Phi_b + \nabla_b\Phi_a = 0$ e (11) é satisfeita. Conforme vimos na parte anterior, a este campo de Killing podemos associar uma isometria. Neste caso, a isometria é simplesmente de translações na coordenada ϕ da S^2, ou seja, rotações ao redor do pólo norte.

E vimos acima: a cada isometria podemos associar uma quantidade conservada, que neste caso chamaremos de *velocidade angular* ℓ. Vamos então escrever o vetor velocidade em termos das derivadas das coordenadas da partícula para escrever a velocidade angular. se $V^\mu = \{\dot\theta, \dot\phi\}$, então:

$$\ell = g_{ab}\Phi^aV^b = \operatorname{sen}^2\theta\,\dot\phi \tag{16}$$

onde o ponto se refere à derivação em relação ao comprimento próprio τ. A condição de normalização da velocidade também é escrita como:

$$\kappa = g_{ab}V^aV^b = \dot\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\,\dot\phi^2 = 1 \tag{17}$$

onde κ só pode ser positivo pois agora o produto interno é sempre positivo. Vemos agora que temos duas funções para duas equações, e o sistema é solúvel. Substituindo o valor de $\dot\phi$ em (16) na equação acima, temos:

$$1 = \dot\theta^2 + \frac{\ell^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \tag{18}$$

que pode ser resolvida por meio de quadraturas:

$$\tau - \tau_0 = \pm \int \frac{d(\cos\theta)}{\sqrt{1 - \ell^2 - \cos^2\theta}}. \tag{19}$$

Onde o sinal denota a orientação da curva. Isto resulta, juntamente com a solução de (16) na geodésica parametrizada pelo tempo-próprio. Se estivermos interessado apenas na trajetória, a equação pode ser resolvida com apenas uma integração. Usando a regra da cadeia em (18):

$$1 = \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \frac{\ell^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \left(\frac{d\theta}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \frac{\ell^2}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\ell^2}{\operatorname{sen}^4\theta}\left(\frac{d\theta}{d\phi}\right)^2 + \frac{\ell^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \tag{20}$$

Temos a solução, também obtida por quadratura:

$$\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \pm\frac{\sqrt{1-\ell^2}}{\ell}\operatorname{sen}\phi. \tag{21}$$

Estas curvas são chamadas *círculos máximos*, e minimizam a distância entre dois pontos. Vemos, por exemplo, que ℓ tem um valor máximo, $\ell_{\max} = 1$, acima do qual não há solução para θ. Para este valor, $\cos\theta = 0$ e o círculo máximo fica exatamente sobre o equador da esfera.

Apesar do exercício envolver métricas positivas (ou *riemannianas*), o exercício se resolve de maneira inteiramente análoga para métricas Lorentzianas (com a mesma signatura da métrica de Minkowski), com o devido cuidado de que neste último caso $\kappa = \pm 1, 0$.

Curvatura; O Tensor de Riemann

Após esta longa introdução à geometria diferencial, finalmente estamos em condições de definir a quantidade geométrica que nos informará da existência de um campo gravitacional. Para relembrar, o resultado do *gedankenexperiment* do elevador nos dizia que a existência do campo gravitacional era sentida pela "deflexão" de órbitas em queda livre vizinhas. Vamos introduzir um sistema de coordenadas para analisar melhor este fenômeno. Se T^a é um campo de vetores que seja geodésico, ou seja, que cujas curvas integrais seguem ambas as partículas em queda livre vizinhas, a deflexão entre órbitas vizinhas se sentiria na variação entre a distância dessas curvas vizinhas à medida que o tempo próprio passe. Chamemos o tempo próprio de t e a coordenada transversal de x. Se a distância entre as geodésicas vizinhas for pequena, ela pode ser tomada por um vetor ao qual chamaremos $\epsilon(\partial_x)^a$. Para resumir:

$$T^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \qquad X^a = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a \tag{22}$$

e $\epsilon \ll 1$ é um número constante.

Para dar uma interpretação geométrica a esta deflexão teremos que assumir que os campos de vetores T^a e X^a são compatíveis, isto é, que as derivadas segundas em t e x comutem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}. \tag{23}$$

Expandindo em termos dos campos de vetores e das derivadas direcionais, temos:

$$T^a \nabla_a (X^b \nabla_b f) = X^a \nabla_a (T^b \nabla_b f) \tag{24}$$

o que implica, já que temos a condição de torção nula $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$, que os vetores *comutam*:

$$T^a \nabla_a X^b - X^a \nabla_a T^b = 0. \tag{25}$$

Chamamos uma base do espaço em que todos os vetores satisfazem a condição de comutatibilidade dois a dois de *base coordenada*.

Em termos de uma base coordenada, então, a deflexão de geodésicas vizinhas tem uma interpretação algébrica simples. Esta vem do seguinte fato:

Teorema. *O comutador de duas derivadas covariantes é um operador linear. Em particular, temos*

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \tag{26}$$

onde $R_{abc}{}^d$ *é chamado de tensor de Riemann.*

Demonstração. Vamos usar a mesma estratégia da prova anterior e mostrar primeiro a linearidade, para campos tensoriais de ordem $(0, 1)$. Expandindo a ação de duas derivadas em $\alpha\omega$, onde α é uma função genérica, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b (\alpha \omega_c) &= \nabla_a [(\nabla_b \alpha)\omega_c + \alpha \nabla_b \omega_c] \\ &= \omega_c \nabla_a \nabla_b \alpha + \nabla_a \alpha \nabla_b \omega_c + \nabla_b \alpha \nabla_a \omega_c + \alpha \nabla_a \nabla_b \omega_c \end{aligned} \tag{27}$$

onde, após subtração de $\nabla_b \nabla_a (\alpha \omega_c)$, só o último termo sobrevive. O primeiro termo desaparece pela condição de torção nula e o segundo e o terceiro termos são simétricos em a e b. Com isto:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(\alpha \omega_c) = \alpha(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c \tag{28}$$

e o comutador é um operador linear. Desta definição, e da condição de torção nula, pode-se escrever a ação do operador linear para qualquer campo tensorial em termos da contração pelo tensor de Riemann. Por exemplo, para qualquer campo vetorial $V^a \omega_a$ é uma função, e assim:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(V^c \omega_c) = 0 \tag{29}$$

Expandindo as derivadas, temos:

$$[(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)V^c]\omega_c + V^c[(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c] = 0 \tag{30}$$

E, como tal condição é válida para qualquer 1-forma ω_c, temos que:

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)V^c = -R_{abd}{}^c V^d. \tag{31}$$

Da mesma forma, podemos achar a ação do comutador das derivadas em um campo tensorial qualquer por indução, como fizemos antes para a conexão. A resposta será:

$$\begin{aligned} (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{a_1 \cdots a_p}{}_{b_1 \cdots b_q} = &- R_{abd}{}^{a_1} T^{d \cdots a_p}{}_{b_1 \cdots b_q} - \ldots - R_{abd}{}^{a_p} T^{a_1 \cdots d}{}_{b_1 \cdots b_q} + \\ &+ R_{abb_1}{}^d T^{a_1 \cdots a_p}{}_{d \cdots b_q} + \ldots + R_{abb_q}{}^d T^{a_1 \cdots a_p}{}_{b_1 \cdots d}. \end{aligned} \tag{32}$$

□

Com este resultado, podemos medir a deflexão de geodésicas vizinhas. A aceleração entre as duas geodésicas é a derivada segunda do vetor X^a (veja Figura 1):

$$A^a = \frac{d^2}{dt^2} X^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \tag{33}$$

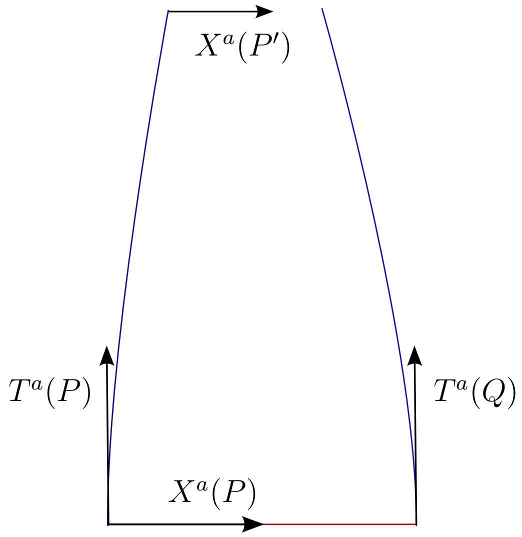

Figura 1: A interpretação do tensor de curvatura como uma medida da deflexão de geodésicas.

Desenvolvendo, com ajuda da regra de Leibnitz,

$$A^a = T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) = T^c (\nabla_c X^b) \nabla_b T^a + T^c X^b \nabla_c \nabla_b T^a \tag{34}$$

Assim,

$$A^a = (X^c \nabla_c T^b) \nabla_b T^a + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - X^b T^c (\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) T^a \tag{35}$$

ou

$$A^a = X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \tag{36}$$

em que apenas o último termo sobrevive pois T^a é um campo geodésico. O tensor de Riemann tem assim a interpretação da aceleração das geodésicas vizinhas. O tensor de Riemann é assim a quantidade que teremos de considerar para determinar o campo gravitacional do espaço-tempo.

Outra interpretação que nos será útil é a de *transporte paralelo*. De fato, considere o processo de transporte paralelo na Figura . Após o transporte paralelo na direção 1, o vetor T^a muda por

$$\delta_1 T^a = \epsilon X_1^b \nabla_b T^a \tag{37}$$

onde X_1^b é paralelo à direção 1 e ϵ é um parâmetro pequeno. Se X_2^b é paralelo à 2, teremos, após o transporte,

$$\delta_{12} T^a = \epsilon^2 X_2^c \nabla_c (X_1^b \nabla_b T^a). \tag{38}$$

Invertendo a ordem do transporte e usando a condição de comutatividade entre X_2^a e X_1^a, poderemos ver que a diferença entre os dois transportes paralelos é proporcional ao tensor de Riemann:

$$\Delta T^a = \delta_{12} T^a - \delta_{21} T^a = \epsilon^2 X_2^c X_1^b (\nabla_c \nabla_b - \nabla_b \nabla_c) T^a = -\epsilon^2 X_2^c X_1^b R_{cbd}{}^a T^d. \tag{39}$$

O tensor de Riemann pode ser calculado em termos da curvatura. De novo, usando a relação entre duas derivadas covariantes, podemos escrever o tensor em termos da conexão. Para uma 1-forma, temos:

$$\nabla_a \omega_b = \bar{\nabla}_a \omega_b - C^c{}_{ab} \omega_c \tag{40}$$

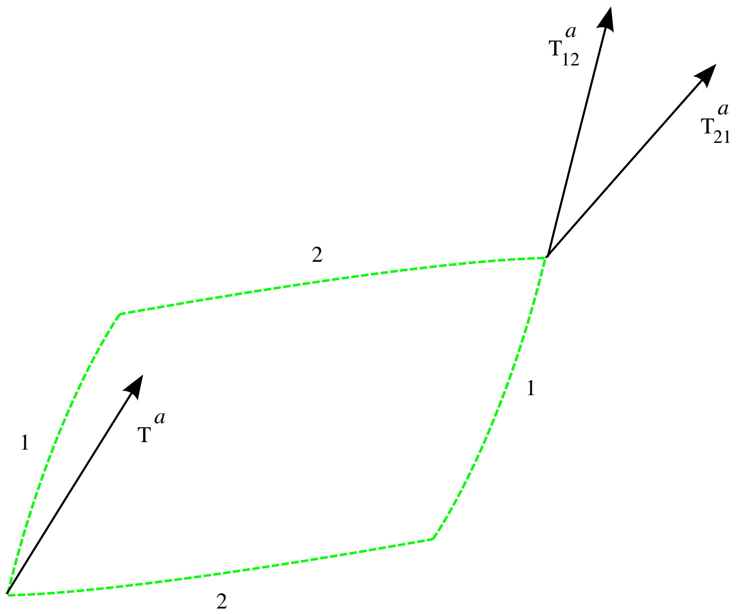

Figura 2: A curvatura como a diferença entre dois transportes paralelos cuja ordem é trocada. A diferença entre os vetores T^a_{12} e T^a_{21} é proporcional ao tensor de Riemann.

E assim,

$$\begin{aligned}\nabla_a\nabla_b\omega_c &= \nabla_a(\bar{\nabla}_b\omega_c - C^d{}_{bc}\omega_d)\\ &= \bar{\nabla}_a(\bar{\nabla}_b\omega_c - C^d{}_{bc}\omega_d) - C^e{}_{ab}(\bar{\nabla}_e\omega_c - C^d{}_{ec}\omega_d) - C^e{}_{ac}(\bar{\nabla}_b\omega_e - C^d{}_{be}\omega_d)\end{aligned} \tag{41}$$

antisimetrizando entre a e b, e tomando a derivada "fiducial" $\bar{\nabla}_a = \partial_a$ como simétrica $\partial_{[a}\partial_{b]} = 0$, teremos:

$$R_{abc}{}^d = -\partial_a C^d{}_{bc} + \partial_b C^d{}_{ac} + C^e{}_{ac}C^d{}_{be} - C^e{}_{bc}C^d{}_{ce}. \tag{42}$$

Que nos dará as componentes do tensor de Riemann em uma base coordenada.

Identidades de Bianchi

O tensor de Riemann, definido acima, tem várias simetrias que facilitarão o seu manuseio, além de serem importantes para o argumento padrão para se chegar às equações de Einstein. Vamos agora listá-las. Pela sua definição (26):

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d\omega_d \tag{43}$$

Temos diretamente a antisimetria entre os dois primeiros índices:

$$R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d. \tag{44}$$

Como a derivada covariante é compatível com a métrica, temos, a partir de (32):

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ce} = 0 \tag{45}$$

Temos a antisimetria também nos últimos dois índices. Definindo $R_{abcd} = R_{abc}{}^e g_{ed}$, a equação acima resulta:

$$R_{abcd} = -R_{abdc}. \tag{46}$$

Outra simetria vem da seguinte identidade. Para toda 1-forma ω_c e toda derivada covariante ∇_a:

$$\nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]} = 0, \tag{47}$$

onde, como acima, os colchetes denotam antisimetrização entre os índices. A prova tem dois passos, o primeiro é mostrar que a expressão acima não depende da conexão, e o segundo, imediato, é usar a derivada "usual", que é simétrica. Para o primeiro passo, vamos usar a relação entre duas derivadas de uma 1-forma:

$$(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b = C^c{}_{ab}\omega_c \tag{48}$$

onde a condição de torção zero implica que $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$ e assim a antisimetrização entre a e b não depende da conexão. Podemos então substituir a derivada em b pela derivada "usual", ∂_b acima, e a expressão se torna:

$$\nabla_{[a}\partial_b\omega_{c]} = \frac{1}{3}(\nabla_a\partial_{[b}\omega_{c]} + \nabla_c\partial_{[a}\omega_{b]} + \nabla_b\partial_{[c}\omega_{a]}) \tag{49}$$

E o passo seguinte, que deixaremos como uma aplicação direta da definição da derivada covariante em tensores, é mostrar que esta expressão não depende da conexão. O resultado segue então do fato de que para a derivada usual $\partial_{[a}\partial_{b]} = 0$. Este resultado é o análogo de metade das equações de Maxwell que podem ser escritas como $\partial_{[a}F_{bc]} = 0$ e recebem o nome de *identidade de Bianchi*.

Com este resultado, podemos reescrever a identidade em termos do tensor de Riemann:

$$\begin{aligned} 0 = \nabla_{[a}\nabla_b\omega_{c]} &= \frac{1}{3}(\nabla_{[a}\nabla_{b]}\omega_c + \nabla_{[b}\nabla_{c]}\omega_a + \nabla_{[c}\nabla_{a]}\omega_b) \\ &= \frac{1}{6}(R_{abc}{}^d\omega_d + R_{bca}{}^d\omega_d + R_{cab}{}^d\omega_d) \end{aligned} \tag{50}$$

o que, para ser válido idempendentemente da 1-forma, resulta:

$$R_{abc}{}^d + R_{bca}{}^d + R_{cab}{}^d = 0 \tag{51}$$

Vamos agora demonstrar uma simetria útil que decorre da simetria acima. Comecemos por "abaixar" o índice d em (51) por meio da contração com o tensor métrico, e trocar d com c. O resultado será:

$$R_{abdc} + R_{bdac} + R_{dabc} = 0 \tag{52}$$

Somando com (51), teremos:

$$\begin{aligned} &R_{abcd} + R_{bcad} + R_{cabd} + R_{abdc} + R_{bdac} + R_{dabc} + \\ &\qquad + R_{adcb} + R_{dcab} + R_{cadb} + R_{dbca} + R_{bcda} + R_{cdba} = 0 \end{aligned} \tag{53}$$

e agora, usando as antisimetrias (44) e (46), resulta:

$$R_{dbca} + R_{dabc} + R_{dcab} = 0. \tag{54}$$

Note agora que o índice constante está na primeira posição. Subtraindo a expressão acima de (52), temos:

$$R_{dbca} + R_{dabc} + R_{dcab} - R_{abdc} - R_{bdac} - R_{dabc} = 0. \tag{55}$$

Que nos dá, diretamente:

$$R_{abcd} = R_{cdab}. \tag{56}$$

Por último, temos a chamada *segunda identidade de Bianchi*:

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^{e} = 0. \tag{57}$$

Que pode ser provada a partir das equações

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)\nabla_c\omega_d = R_{abc}{}^{e}\nabla_e\omega_d + R_{abd}{}^{f}\nabla_c\omega_f \tag{58}$$

e

$$\nabla_a(\nabla_b\nabla_c - \nabla_c\nabla_b)\omega_d = \nabla_a(R_{bcd}{}^{e}\omega_e) = \omega_e\nabla_a R_{bcd}{}^{e} + R_{bcd}{}^{e}\nabla_a\omega_e \tag{59}$$

que são consequência da definição da ação do comutador de derivadas covariantes em campos tensoriais genéricos (32). A segunda identidade de Bianchi segue da antisimetrização das equações acima e será deixada como exercício.

Referências

[1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc (1972).

[2] Jean-Philippe Uzan, *The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 403, [arXiv:hep-ph/0205340].

[3] V. I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir, 1985; alternativamente, pode-se consultar do mesmo autor *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, (1989), §18;

[4] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides – LTC (1988);

[5] L. Landau e E. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 2: Teoria do Campo*, Editora Mir, (1980);

[6] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).

[7] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, [arXiv:gr-qc/9712019], ou *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).

[8] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).