Introdução à Relatividade Geral

Notas de aula por Bruno Carneiro da Cunha

Parte 3: Velocidades e Acelerações

A Aceleração de uma Curva

Se o conceito de velocidade é intuitivo e facilmente generalizado, o conceito de aceleração é um pouco mais envolvido. A primeira coisa que temos de levar em conta é que a aceleração, definida como a derivada temporal da velocidade, não é sempre um vetor. Pode-se ilustrar este fato com um argumento ingênuo. Considere uma definição (errada) de aceleração como a derivada direcional das componentes de V^a na direção de V^a:

$$a^\mu \stackrel{?}{=} V(V^\mu) = V^a (dV^\mu)_a \tag{1}$$

Isto porém não se tranforma como um vetor por transformações de cartas (ou coordenadas). Usando $V^\mu = V(x^\mu) = V^b (dx^\mu)_b$:

$$a^\mu \stackrel{?}{=} V^a ((dV^b)(dx^\mu)_b + V^b (d^2 x^\mu)_b) \tag{2}$$

Onde se vê que o segundo termo envolve derivadas segundas e não se modifica como um vetor. A razão por trás deste fato é fácil de elucidar: rela definição que demos acima, um vetor é sempre tangente ao espaço-tempo, enquanto em geral uma aceleração, uma derivada de vetor, não é. Podemos facilmente considerar o exemplo do movimento circular uniforme em que a aceleração tem uma componente "normal" à superfície sobre a qual o movimento se processa. A componente normal da aceleração é por sua vez uma propriedade geométrica da superfície:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{a_\perp^2}{(v^2)^2} \tag{3}$$

é chamado de *curvatura* (sectional) da superfície. O componente da aceleração que efetivamente responde às forças existentes na superfície é a componente tangencial da aceleração. O truque parece ser, então, **projetar** a derivada de um vetor de forma que ele seja sempre tangente. De como podemos ver em (2), a componente problemática envolve a segunda derivada da coordenada x^μ, mas é proporcional a V^b, e pode ser assim pensada como um operador linear atuando sobre V^b. Desta forma, ao invés de (1) a definição real da aceleração deve ser:

$$A^a \equiv V^a \nabla_a V^b = V^a \partial_a V^b + \Gamma^b{}_{ac} V^a V^c, \tag{4}$$

onde introduziu-se um símbolo ∇_a para esta "derivada tangencial" que descrevemos antes. Note a dependência explícita das derivadas parciais de V^a, e do operador de projeção, $\Gamma^b{}_{ac}$, ao qual chamaremos *conexão*, que cancela a componente "normal" da aceleração. O símbolo ∇_a é chamado de *derivada covariante* e vai ser o objeto de estudo da próxima seção.

Vamos, durante as próximas seções, formalizar estas idéias intuitivas.

Campos Vetoriais e Tensoriais

Anteriormente, tomamos cuidado para nos referir a um vetor deixando sempre explícita sua dependência do ponto do espaço ao qual está associado. A razão por trás deste cuidado está na própria definição de vetor que demos: velocidades de curvas está definida apenas no ponto P em que calculamos sua derivada. A partir desta idéia, podemos introduzir a idéia de *campo vetorial*, onde associamos um vetor a cada ponto P do espaço. Da mesma forma, podemos pensar em um *campo de 1-formas*, onde a cada ponto do espaço associamos uma 1-forma ω_a. A noção de campo será importantíssima para que possamos calcular sua derivada com rigor, e serve para dissociarmos o conceito de vetor em geral com o conceito de velocidade de uma partícula. Muitas vezes no que se segue vamos cometer abusos de linguagem onde omitiremos a menção ao ponto no qual estamos calculando o campo vetorial.

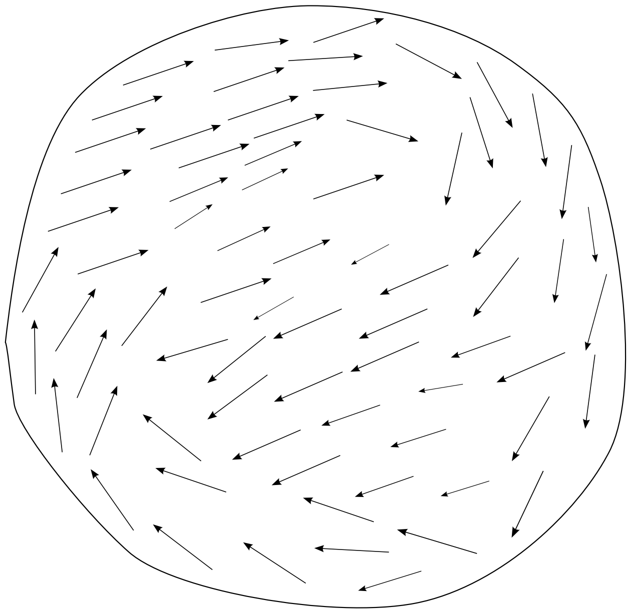

Figura 1: Um campo de vetores. A cada ponto da variedade temos um vetor "tangente".

Com esta idéia de campo vetorial, torna-se importante definir não só a derivada direcional de V^a, como fizemos acima, como também derivadas em outras direções. Isto nos leva a considerar o símbolo abstrato $\nabla_a V^b$, que possui um caráter misto: quando contraímos o índice inferior (também chamado "covariante") com um vetor U^a, obtemos um vetor, que é a derivada direcional de V^b na direção U^a:

$$U^a \nabla_a V^b. \tag{5}$$

Tal símbolo é então um operador linear que nos devolve um vetor para um vetor que o fornecemos. Na próxima seção vamos considerar exemplos de operadores de ordem mais alta, mas deixamos a definição de um *tensor de ordem* (p, q) é um símbolo da forma

$$T^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}. \tag{6}$$

Como aquele que devolve um número real se contraído com q vetores e p 1-formas. Os índices superiores, como os dos vetores, são chamados *índices contravariantes* e os inferiores, como vimos, são chamados *índices covariantes*. Então, um vetor pode ser chamado de tensor de ordem $(1,0)$ enquanto a 1-forma pode ser chamada de tensor de ordem $(0,1)$. A derivada do vetor $\nabla_a V^b$ é analogamente um tensor de ordem $(1,1)$. De forma análoga ao tensor, podemos pensar em um *campo tensorial* onde temos um símbolo como o acima para cada ponto da variedade.

Difeomorfismos

Além de sua interpretação de derivada direcional, os campos vetoriais também têm um papel importante no entedimento de difeomorfismos entre variedades. Como vimos na parte anterior, difeomorfismos são funções bijetivas diferenciáveis entre variedades, cuja inversa também é diferenciável. A cada campo vetorial V^a podemos associar um *difeomorfismo a um parâmetro* $\phi_V(t)$, cuja imagem e domínio são a variedade $\mathscr{M}$, da seguinte forma: a cada ponto $P \in \mathscr{M}$ escolhemos um mapa com coordenadas $\{x^\mu\}$. Neste sistema de coordenadas, as componentes do vetor V^a no ponto P será dada por $V^\mu = V^a(dx^\mu)_a$. As componentes $\{y^\mu\}$ do difeomorfismo a um parâmetro $\phi_V(t)$ são definidas como a solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{dy^\mu}{dt} = V^\mu(\{x^\mu\}). \tag{7}$$

Como estamos lidando com abertos de $\mathbb{R}^n$, a solução sempre existirá, ao menos para $t < \epsilon$. Este difeomorfismo é a tradução para a linguagem da geometria diferencial da idéia de "vetor posição" da mecânica clássica, mais especificamente do papel da velocidade na posição:

$$\mathbf{r}(t) \approx \mathbf{r} + \mathbf{v}t \tag{8}$$

que é válido para t pequeno o bastante.

O difeomorfismo gerado por V^a nos permite definir importantes conceitos para a variedade que existem sem a dependência da métrica ou a estrutura de espaço vetorial do $\mathbb{R}^n$ como estamos acostumados em mecânica newtoniana. Antes de tudo, vamos nos ater primeiro a difeomorfismos gerais ϕ e sua ação em campos tensoriais. No que concerne à ação de ϕ nos vetores, vamos lembrar que vetores agem sobre funções da variedade definindo a derivada direcional. Se tivermos uma função da variedade nos números reais, podemos compô-la com o difeomorfismo ϕ, e assim definir a ação do difeomorfismo em um vetor V^a:

$$(\phi^* U)(f) = U(f \circ \phi). \tag{9}$$

O que significa, em palavras que podemos definir a derivada direcional na imagem a partir da derivada direcional no domínio se compormos a função a ser derivada com o difeomorfismo. Dizemos assim que o novo vetor, definido por $(\phi^* U)^a$ é o "empurrão" ("push forward") do vetor U^a. Veja a figura 2 para um ilustração de como o "empurrão" funciona para um difeomorfismo geral ϕ.

Da mesma maneira definimos a ação de ϕ em 1-formas a partir do resultado para vetores. Como este costuma ser um argumento recorrente em geometria diferencial, vamos nos demorar um pouco nisto. Para isto notemos que uma 1-forma ω_a e um vetor U^a definem uma função da variedade nos reais por meio da contração:

$$U^a \omega_a : M \to \mathbb{R}. \tag{10}$$

Vamos definir então a ação do difeomorfismo ϕ sobre a 1-forma ω_a por meio da composição desta função com ϕ e da ação de ϕ sobre o vetor U^a. Assim a nova 1-forma $(\phi_* \omega)_a$ é definida como aquela que, para todo U^a satisfaz:

$$(\phi^* U)^a \omega_a = U^a (\phi_* \omega)_a. \tag{11}$$

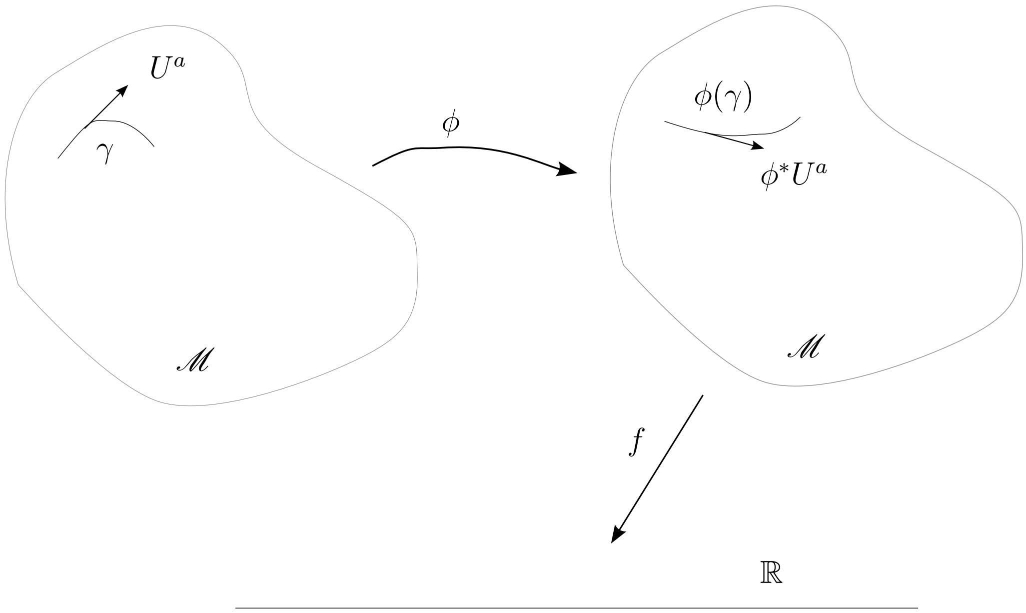

Figura 2: A definição do "empurrão" de um vetor V^a por meio de um difeomorfismo ϕ. Dada uma curva γ cujo vetor tangente é U^a, podemos definir $\phi^* U^a$ como o vetor tangente à imagem da curva γ pelo difeomorfismo, $\phi(\gamma)$. A função f serve para a definição alternativa usando o conceito de derivada direcional (9).

A esta definição chamamos de "puxão" ("pull-back") de ω_a por meio do difeomorfismo ϕ. A nomeclatura vem do fato do lado esquerdo da equação ser definido na imagem do ponto P, $\phi(P)$, o que significa que uma 1-forma na imagem induz uma 1-forma no domínio e não o contrário.

A ação de ϕ em um campo tensorial genérico é feita de maneira inteiramente análoga. Porém só devemos ter cuidado com tensores do tipo misto, isto é, com índices covariantes e contravariantes, pelo fato do "empurrão" de vetores e do "puxão" de 1-formas definirem suas imagens em espaços diferentes: $\phi(P)$ e P, respectivamente. Tudo porém é resolvido se usarmos a inversa de ϕ para definir as formas na imagem do difeomorfismo. Pela definição de difeomorfismo que usamos, a inversa ϕ^{-1} possui as mesmas propriedades diferenciais de ϕ, e assim pode ser usada sem problemas. Definimos então a ação de ϕ em um tensor genérico $T^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}$ em P como aquele tensor em $\phi(P)$ que satisfaz:

$$(\phi * T)^{a_1 \cdots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q} (\mu_1)_{a_1} \cdots (\mu_p)_{a_p} (V_1)^{b_1} \cdots (V_q)^{b_q} = \\ T^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \cdots b_q} (\phi_* \mu_1)_{a_1} \cdots (\phi_* \mu_p)_{a_p} ([\phi^{-1}]^* V_1)^{b_1} \cdots ([\phi^{-1}]^* V_q)^{b_q} \qquad (12)$$

para todas 1-formas $(\mu_1)_{a_1} \cdots (\mu_p)_{a_p}$ e todos os campos vetoriais $(V_1)^{b_1} \cdots (V_q)^{b_q}$.

Derivadas de Lie

Vamos agora explorar o conceito de difeomorfismo a um parâmetro e as suas ações sobre campos tensoriais. Como vimos acima, dado um campo vetorial V^a, podemos construir um difeomorfismo a um parâmetro $\phi_V(t)$ como a solução de (7). Chamamos então de *derivada de Lie* de um campo tensorial $T^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}$ em relação a um campo vetorial V^a a quantidade:

$$\mathscr{L}_V T^{a_1 \cdots a_p}{}_{b_1 \cdots b_q} = \lim_{t \to 0} \frac{(\phi_V(-t) * T)^{a_1 \cdots a_p}{}_{b_1 \cdots b_q} - T^{a_1 \cdots a_p}{}_{b_1 \cdots b_q}}{t}. \qquad (13)$$

Que tem a interpretação de taxa de variação de $T^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\ldots b_q}$ na direção dada por V^a. O sinal negativo advém do fato da nossa definição da ação de difeomorfismos em tensores, como em (12): a ação em campos vetoriais se processa pela inversa. Note que pela definição a derivada de Lie de um campo tensorial de ordem $(0,0)$, ou seja, uma função f, é a derivada direcional de f:

$$\mathscr{L}_V f = V(f) = V^a (df)_a. \tag{14}$$

Para analisar a ação de $\mathscr{L}_V$ em um campo tensorial genérico, ajuda que escolhamos uma carta, ou sistema de coordenadas que seja paralelo à V^a, ou seja, que escolhamos uma das coordenadas, x_1 por exemplo, de tal forma que:

$$V^a = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^a \tag{15}$$

Assim, por (7), o difeomorfismo a um parâmetro associado a V^a terá uma ação simples nestas coordenadas:

$$\phi_V(t)(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \{x_1 + t, \ldots, x_n\} \tag{16}$$

E sua ação sobre um campo tensorial genério será dada pela aplicação direta de (12):

$$(\phi_V(-t) * T)^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_q}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = T^{a_1\cdots a_p}{}_{b_1\cdots b_q}(\{x_1 + t, \ldots, x_n\}) \tag{17}$$

E assim, observamos que a derivada de Lie recupera a noção de derivada em relação a uma coordenada do cálculo de multivariáveis, pois nestas coordenadas $\{x_1 + t, \ldots, x_n\}$ teremos:

$$\mathscr{L}_V T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} = \frac{\partial}{\partial x_1} T^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \tag{18}$$

Podemos então aplicar esta definição para o caso de um vetor. Escolhendo o mesmo sistema de coordenas acima, teremos:

$$\mathscr{L}_V U^a = \frac{\partial}{\partial x_1} U^\mu. \tag{19}$$

Note, porém que dado dois vetores V^a e U^a podemos definir seu *comutador* como aquele que age sobre funções da seguinte forma:

$$[V, U](f) = V(U(f)) - U(V(f)). \tag{20}$$

Se expandirmos esta quantidade em coordenadas genéricas, teremos:

$$[V, U](f) = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(U^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\right) - U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(V^\nu \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\right) = \left(V^\mu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu} - U^\mu \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu}\right)\frac{\partial f}{\partial x^\nu}, \tag{21}$$

onde na expressão acima a soma sobre μ e ν é implícita. Vemos que, sendo um operador diferencial de primeira ordem, o comutador de dois vetores também é um vetor. Alternativamente, pode-se mostrar que $[V, U]^a$ se transforma como um vetor sob transformações de coordenadas. O comutador mede o quanto a derivada segunda de uma função falha em ser comutativa nas direções dadas por U e V.

A relação entre o comutador e a derivada de Lie se explicita quando escrevemos a expressão acima nas coordenadas usadas para escrever (18):

$$[V, U]^\mu = \sum_\nu V^\mu \frac{\partial U^\nu}{\partial x^\mu} - U^\mu \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial U^\mu}{\partial x_1} \tag{22}$$

pois nestas coordenadas as componentes V^μ do vetor V^a são dadas por $\{1, 0, \ldots, 0\}$. Como estas quantidades são iguais nestas coordenadas, e se transformam da mesma maneira, elas devem ser iguais em qualquer sistemas de coordenadas. Desta forma, a derivada de Lie de um campo vetorial por outro é igual a seu comutador:

$$\mathscr{L}_V U^a = [V, U]^a \tag{23}$$

A Derivada Covariante; Conexões

Como vimos no ínicio da seção anterior, precisamos definir um conceito de derivada que resulte em componentes sempre "tangenciais" à variedade. Como este conceito depende fundamentalmente da métrica, vamos por enquanto trabalhar de forma mais abstrata possível. Neste primeiro passo então, vamos definir uma noção de derivada covariante que se adeque a todas as situações que iremos encontrar.

Definição: Uma derivada covariante é um operador diferencial ∇_a, que leva campos tensoriais $A^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}$ e $B^{a_1 \ldots a'_p}{}_{b_1 \ldots b'_q}$ de ordem (p', q') em campos tensoriais de ordem $(p, q+1)$ e de $(p', q'+1)$, respectivamente, que satifaz:

1. *Linearidade*: Se $p' = p$ e $q' = q$, e α e β números reais, então:

$$\nabla_a[\alpha A^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q} + \beta B^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}] = \alpha \nabla_a A^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q} + \beta \nabla_a B^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}. \tag{24}$$

2. *Regra de Leibnitz*: Para $A^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}$ e $B^{a_1 \ldots a_{p'}}{}_{b_1 \ldots b_{q'}}$ como acima, então:

$$\begin{aligned} \nabla_a[A^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q} B^{c_1 \ldots c_{p'}}{}_{d_1 \ldots d_{q'}}] = \nabla_a[A^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}] B^{c_1 \ldots c_{p'}}{}_{d_1 \ldots d_{q'}} + \\ + A^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q} \nabla_a B^{c_1 \ldots c_{p'}}{}_{d_1 \ldots d_{q'}}. \end{aligned} \tag{25}$$

3. *Comutatividade com contração*: para todo $A^{a_1 \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots b_q}$, temos:

$$\nabla_a[A^{a_1 \ldots c \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_q}] = \nabla_a A^{a_1 \ldots c \ldots a_p}{}_{b_1 \ldots c \ldots b_q}, \tag{26}$$

   onde no lado esquerdo fizemos a contração antes de derivação e no lado direito o contrário.

4. *Consistência com a definição de vetor*: para toda função f e todo vetor V^a:

$$V(f) = V^a \nabla_a f. \tag{27}$$

   O que significa que podemos ler $\nabla_a f$ como o "gradiente" de f.

5. *Ausência de Torção*: para toda função f, temos:

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f. \tag{28}$$

   Esta última condição pode, porém ser relaxada e substituída por:

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -T^c{}_{ab} \nabla_c f \tag{29}$$

   e ainda sim a geometria será consistente. O tensor $T^c{}_{ab}$ é chamado de *tensor de torção*. Não vamos, contudo usar tal tensor no estudo de Relatividade Geral. Esta condição pode então ser lida como a requisição que $T^c{}_{ab} = 0$.

Dados os axiomas acima, podemos provar o seguinte teorema fundamental:

Teorema. *Dados dois operadores que satisfazem os axiomas acima, ∇_a e $\bar{\nabla}_a$, temos que sua diferença é um operador linear.*

Demonstração. Pelos axiomas 1 e 2, basta que provemos a linearidade para uma 1-forma e um vetor, separadamente. De fato, tal operador leva a soma de 1-formas na soma de derivadas. Quanto à multiplicação por funções, usaremos a regra de Leibnitz:

$$(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)(f\omega_b) = ((\bar{\nabla}_a - \nabla_a)f)\omega_b + f(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b. \tag{30}$$

Porém, pelo axioma 4, $\nabla_a f$ é o gradiente de f, para qualquer derivada covariante. Ou seja, se contrairmos um vetor com o índice em a, teremos:

$$V^a(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)f = V(f) - V(f) = 0 \tag{31}$$

para qualquer vetor V^a. Segue então que o primeiro termo do lado esquerdo de (30) deve se anular, e neste caso a linearidade é garantida. Note agora que o caso de um vetor é inteiramente análogo, com o termo equivalente se anulando por exatamente o mesmo motivo. □

A condição de linearidade é importantíssima. Se a diferença entre duas derivadas covariantes a satisfaz em cada ponto do espaço, então podemos escrevê-la da seguinte, sugestiva forma: *para quaisquer duas derivadas covariantes*:

$$(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b = C^c{}_{ab}\omega_c \tag{32}$$

Note que o símbolo $C^c{}_{ab}$ desempenha o mesmo papel do nosso "projetor", introduzido no início da seção anterior. Isto não é exatamente um acidente. Os axiomas envolvidos na definição de derivada covariante são os mesmos que nos dão uma definição de "espaço tangente" e "espaço normal", e o símbolo $C^c{}_{ab}$ introduzido é chamados de *conexão afim*.

De maneira inteiramente análoga, se chega que a diferença entre duas derivadas covariantes atuando em um campo vetorial é

$$(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)V^b = D^b{}_{ac}V^c, \tag{33}$$

Onde, supreendentemente, podemos associar o novo símbolo $D^b{}_{ac}$ com $C^c{}_{ab}$ graças aos axiomas 2, 3 e 4:

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_a(V^b\omega_b) &= (\bar{\nabla}_a V^b)\omega_b + V^b\bar{\nabla}_a\omega_b \\ &= (\nabla_a V^b + D^b{}_{ac}V^c)\omega_b + V^b(\nabla_a\omega_b + C^c{}_{ab}\omega_c) \\ &= \nabla_a(V^b\omega_b) + (D^b{}_{ac} + C^b{}_{ac})V^c\omega_b,\end{aligned} \tag{34}$$

o que significa $D^b{}_{ac} = -C^b{}_{ac}$, já que a primeira parcela deve ser igual ao termo do lado esquerdo na primeira linha pois $V^b\omega_b$ é uma função. Note a mudança de índices contraídos ("mudos") na última linha. Antes de fazer o caso geral, vamos calcular a diferença entre duas derivadas covariantes em um campo tensorial de ordem $(0, 2)$. Usando as propriedades 2 e 3, temos, para todo vetor V^a:

$$\nabla_a(S_{bc}V^c) = (\nabla_a S_{bc})V^c + S_{bc}\nabla_a V^c \tag{35}$$

e então a diferença entre duas derivadas covariantes ∇_a e $\bar{\nabla}_a$, será:

$$(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)(S_{bc}V^c) = [(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)S_{bc}]V^c + S_{bc}(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)V^c. \tag{36}$$

Agora, usando o resultado acima que obtivemos para 1-formas e vetores, teremos:

$$[(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)S_{bc}]V^c = S_{bc}C^c{}_{ad}V^d + C^d{}_{ab}S_{dc}V^c, \tag{37}$$

e, como este resultado é válido para um vetor genérico V^c, devemos ter:

$$(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)S_{bc} = C^d{}_{ab}S_{dc} + C^d{}_{ac}S_{bd}. \tag{38}$$

Este resultado pode ser diretamente generalizado para um tensor de ordem (p, q). O resultado será:

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_a - \nabla_a)T^{a_1\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q} = C^b{}_{ab_1}T^{a_1\ldots a_p}{}_{b\ldots b_q} + \cdots + C^b{}_{ab_q}T^{b\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b}- \\ - C^{a_1}{}_{ab}T^{b\ldots a_p}{}_{b_1\ldots b_q} - \cdots - C^{a_p}{}_{ab}T^{a_1\ldots b}{}_{b_1\ldots b_q}.\end{aligned} \tag{39}$$

Estes resultados serão, como veremos abaixo, de suma importância para o uso operacional da derivada covariante.

A Métrica Como um Campo Tensorial

Como dissemos no início da seção anterior, o principal motivo de introduzirmos a derivada covariante da forma que fizemos foi o fato desta definição se adequar a todas as situações que encontraremos. Conforme vimos no início desta nota, a definição da derivada covariante advém da necessidade de considerar a derivada de um vetor em uma certa direção como um vetor. Isto implica em separar a derivada do vetor em componentes “normais” e “tangenciais”, e esta última é a que nos interessa. Esta projeção é implementada por uma *conexão*, cujo papel é desempenhado pelo símbolo $C^c{}_{ab}$ acima.

Veja, porém, que toda esta estrutura (espaço tangente, espaço cotangente, derivada covariante), existe sem a necessidade de uma métrica. Este ponto deve ser frisado pois há uma distinção grande da nossa construção e da existência destas entidades no espaço euclideano, como é vista normalmente nos cursos de cálculo. Como vimos na seção sobre o princípio da equivalência, uma métrica é uma definição de produto interno entre vetores que pode variar de ponto a ponto do espaço tempo. Ou seja, é uma aplicação linear que nos devolve um número real para cada par de vetores V^a e U^b:

$$g_{ab}V^aU^b \in \mathbb{R}. \tag{40}$$

Esta é a própria definição de um tensor de ordem $(0, 2)$.

Definição. *Chamamos de espaço-tempo uma variedade diferenciável $\mathscr{M}$ munida de um campo tensorial g_{ab} de ordem $(0, 2)$, chamado* **métrica***, com signatura $(-, +, +, +)$.*

A idéia de componentes “normais” e “tangenciais” da derivada de vetores, como dissemos acima, só faz sentido real quando consideramos o espaço embebido em outro, como uma subvariedade. O exemplo clássico é o da 2-esfera S^2 dentro do espaço euclideano tridimensional. Porém, depois dos avanços de Gauss e Riemann, viu-se que essa projeção que requeriremos da derivada covariante pode ser traduzida por uma condição intríseca à geometria (isto, é, à métrica que estamos considerando. Dito de outra forma, podemos impor uma condição de compatibilidade entre a derivada covariante e a métrica de tal forma que derivadas de campos tensoriais sejam sempre “tangentes” à varieade. Por esta causa, a geometria não euclideana foi chamada de “geometria intrseca” nos seus primórdios.

Esta condição é na verdade de uma simplicidade incrível, e pode ser vista como um "primeiro princípio". De fato, dizemos que uma derivada covariante é *compatível com a métrica* se

$$\nabla_a g_{bc} = 0. \tag{41}$$

Como veremos abaixo, esta condição é suficiente para definirmos a conexão em termos da métrica.

Cálculo da Conexão. Símbolos de Christoffel

Dado um espaço-tempo, temos um campo tensorial especial, a métrica g_{ab}. Conforme vimos acima em (39), a relação entre duas derivadas covariantes da métrica é dada por:

$$(\nabla_a - \bar{\nabla}_a) g_{bc} = -C^d{}_{ab} g_{dc} - C^d{}_{ac} g_{bd} \tag{42}$$

Se conhecêssemos uma derivada covariante, então a condição de compatibilidade poderia ser definida para calcular as conexões $C^c{}_{ab}$ em termos de derivadas da métrica. Vamos achar esta solução. Suponha que ∇_a é uma derivada covariante compatível com g_{bc}. Então:

$$\nabla_a g_{bc} = \bar{\nabla}_a g_{bc} - C^d{}_{ab} g_{dc} - C^d{}_{ac} g_{bd} = 0. \tag{43}$$

Note também que a condição de torção nula implica que a conexão é simétrica nos índices inferiores:

$$\nabla_a \nabla_b f = \bar{\nabla}_a \nabla_b f - C^c{}_{ab} \nabla_c f \tag{44}$$

é um tensor simétrico em a, b se a conexão satisfizer $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$. Estes ingredientes são necessários para resolvermos o problema. Defina $C_{cab} = g_{cd} C^c{}_{ab}$ e considere permutações cíclicas de (43):

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_a g_{bc} =& C_{cab} + C_{bac} \\ \bar{\nabla}_b g_{ca} =& C_{abc} + C_{cba} \\ \bar{\nabla}_c g_{ab} =& C_{bca} + C_{acb} \end{aligned} \tag{45}$$

Usando a condição de torção nula $C_{cab} = C_{cba}$, vamos somar as duas primeiras equações e subtrair a última. O resultado será:

$$C_{cab} + C_{cba} = \bar{\nabla}_a g_{bc} + \bar{\nabla}_b g_{ca} - \bar{\nabla}_c g_{ab}. \tag{46}$$

Então, a conexão é:

$$C^c{}_{ab} = \frac{g^{cd}}{2} \left(\bar{\nabla}_a g_{bd} + \bar{\nabla}_b g_{da} - \bar{\nabla}_d g_{ab} \right), \tag{47}$$

onde g^{cd} é o tensor inverso da métrica, definido de forma que $g^{cd} g_{ad} = \delta^c_a$.

Note que este resultado é geral para a relação entre quaisquer duas derivadas covariantes. Tudo que precisamos agora é saber calcular $\bar{\nabla}_a g_{bc}$ *para uma derivada covariante qualquer.* A escolha usual é usar a métrica euclidiana (ou minkowskiana), e tratar as componentes de $\bar{\nabla}_a$ como derivadas parciais ∂_μ. Dito de forma mais formal, toma-se coordenadas, e usa-se tais coordenadas para definir curvas e assim vetores tangentes. Como vimos na seção anterior, a derivada de qualquer campo tensorial nestas coordenadas é um objeto bem definido por meio da derivada de Lie do vetor correspondente. Pode-se ver diretamente que todos os axiomas de derivadas covariantes são satisfeitos com esta definição. Assim, a conexão, escrita nestas coordenadas tomam a forma de:

$$\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \sum_\lambda \frac{g^{\mu\lambda}}{2} \left(\partial_\nu g_{\lambda\rho} + \partial_\rho g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\rho} \right) \tag{48}$$

são chamados *símbolos de Christoffel* e são designados pela letra Γ.

Exemplo: A 2-esfera S^2

A 2-esfera, definida pela equação em $\mathbb{R}^3$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2. \tag{49}$$

Pode ser melhor escrita em coordenadas esféricas $\{r, \theta, \phi\}$ como a superfície de $r = R$ constante. Do elemento de linha euclidiana em coordenadas esféricas

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \; d\phi^2) \tag{50}$$

temos um *elemento de linha induzido da 2-esfera*:

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta \; d\phi^2). \tag{51}$$

A associação deste elemento de linha com uma métrica g_{ab} é automática, mas iremos de passo em passo neste primeiro exemplo. Dadas as coordenadas $\{r, \theta, \phi\}$ em $\mathbb{R}^3$, definiremos três campos vetoriais:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a \tag{52}$$

que servirão de base para o espaço tangente $T\mathbb{R}^3$. De forma análoga, os gradientes

$$(dr)_a, \quad (d\theta)_a, \quad (d\phi)_a \tag{53}$$

são uma base do espaço cotangente, com $(\partial_\mu)^a(dx^\nu)_a = \delta^\nu_\mu$. Na verdade esta não é uma base em todos os pontos da variedade $\mathbb{R}^3$, mas por enquanto não nos preocupemos. Podemos ver que, dado um vetor genérico

$$V^a = V_r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + V_\theta\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a + V_\phi\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a \tag{54}$$

sua norma é dada pelo elemento de linha (50):

$$g_{ab}V^aV^b = V_r^2 + r^2\, V_\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, V_\phi^2 \tag{55}$$

E assim, vê-se que a métrica de $\mathbb{R}^3$ é escrita de forma

$$\delta_{ab} = (dr)_a(dr)_b + r^2(d\theta)_a(d\theta)_b + r^2 \operatorname{sen}^2\theta(d\phi)_a(d\phi)_b. \tag{56}$$

Onde é importante perceber que o tensor δ_{ab} é na verdade *o mesmo* do usualmente escrito em coordenadas euclidianas:

$$\delta_{ab} = (dx_1)_a(dx_1)_b + (dx_2)_a(dx_2)_b + (dx_3)_a(dx_3)_b \tag{57}$$

porém escrito com gradientes (coordenadas) diferentes.

E a *métrica induzida na esfera* é, finalmente, a métrica restrita a r constante, ou $(dr)_a = 0$:

$$g_{ab} = R^2((d\theta)_a(d\theta)_b + \operatorname{sen}^2\theta(d\phi)_a(d\phi)_b) \tag{58}$$

O que dá as componentes $g_{\theta\theta} = R^2$ e $g_{\phi\phi} = R^2 \operatorname{sen}^2\theta$. Da definição de matriz inversa teremos $g^{\theta\theta} = 1/R^2$ e $g^{\phi\phi} = 1/R^2 \operatorname{sen}^2\theta$, ou, em termos de uma base de vetores:

$$g^{ab} = \frac{1}{R^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^b + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^b\right] \tag{59}$$

Agora podemos calcular os símbolos de Christoffel diretamente a partir da definição (48). O resultado será:

$$\begin{aligned} {\Gamma^\theta}_{\theta\theta} = &{\Gamma^\theta}_{\phi\theta} = {\Gamma^\theta}_{\theta\phi} = {\Gamma^\phi}_{\phi\phi} = 0, \\ {\Gamma^\theta}_{\phi\phi} = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, &\quad {\Gamma^\phi}_{\phi\theta} = {\Gamma^\phi}_{\theta\phi} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}. \end{aligned} \tag{60}$$

E deixamos como exercício a prova que tal conexão projeta a derivada de um vetor nas suas componentes tangenciais à esfera.

Referências

[1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc (1972).

[2] Jean-Philippe Uzan, *The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 403, [arXiv:hep-ph/0205340].

[3] V. I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir, 1985; alternativamente, pode-se consultar do mesmo autor *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, (1989), §18;

[4] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides – LTC (1988);

[5] L. Landau e E. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 2: Teoria do Campo*, Editora Mir, (1980);

[6] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).

[7] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, [arXiv:gr-qc/9712019], ou *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).

[8] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).