



Introdução à Relatividade Geral

Notas de aula por Bruno Carneiro da Cunha

Parte 2: O Princípio da Relatividade Geral

O Princípio da Equivalência

A partir da idéia de espaço-tempo embutida na Relatividade Restrita,

$$d(P, Q)^2 = c^2(t(P) - t(Q))^2 - (x(P) - x(Q))^2 - (y(P) - y(Q))^2 - (z(P) - z(Q))^2, \quad (1)$$

Einstein pôs-se a tentar reformular a Lei da Gravitação de Newton. Procurava um princípio desta Lei que pudesse ser “traduzido” para o novo conceito de Relatividade. A idéia veio de um *gedankenexperiment* em que Einstein imaginava um observador, selado em um elevador em queda livre, fazendo experimentos. A menos que o observador tivesse acesso ao mundo exterior, postulava Einstein, nada que ele pudesse medir no interior do elevador diferenciaria o resultados dos seus experimentos dos experimentos conduzidos no espaço exterior, sob a ausência de gravidade. Dito de outra forma, o observador no elevador não conseguiria diferenciar seu elevador movendo-se a uma velocidade constante sob ação do campo gravitacional terrestre de um elevador movendo-se com aceleração constante g no espaço sideral.

Embutido na idéia acima está o **princípio da equivalência**, que diz que a massa, ou a quantidade de inércia de um corpo, é a mesma quer o corpo sofra a ação da força gravitacional (massa gravitacional), quer o corpo sofra qualquer outro tipo de força (massa inercial). Este princípio é verificado experimentalmente com grande precisão¹, e a partir dele Einstein postulou que a gravitação, sendo um fenômeno universal, era na verdade uma propriedade geométrica do espaço-tempo.

Segundo ele, tanto o elevador em queda livre quanto o elevador no espaço sideral seguiriam curvas sem aceleração *no espaço-tempo*. O fato de sentirmos a força da gravidade ao caminharmos sobre a Terra é, segundo Einstein, explicada pelo fato de sofrermos uma aceleração causada pelo chão aos nossos pés. Esta aceleração é sentida no espaço-tempo, e sua tradução no linguajar de mecânica clássica é a “força normal”, que vem contrabalançar a “força peso”. Assim, a “força peso” da mecânica Newtoniana ganha o mesmo status da “força centrífuga”: aparece apenas como a tradução das leis do movimento para um referencial não-inercial. Neste caso, o referencial não-inercial trata-se de uma pessoa caminhando sobre a Terra.

O que então definiria o conceito de “curva sem aceleração” no espaço-tempo? Einstein tomou emprestado aqui os conceitos de geometria riemanniana. Assim como a Relatividade, a geometria riemanniana tentava definir uma geometria baseada puramente no conceito de distância. Curvas sem aceleração são definidas claramente naquele caso, e podem ser definidas de maneira puramente análoga em Relatividade. A questão então é definir como e por qual agente a distância muda. Einstein aqui tentou formalizar uma série de idéias mais ou menos vagas sobre inércia que são conhecidas hoje em dia pelo **princípio de Mach**. Mach

¹Experimentos conduzidos na década de 70 verificaram que a massa inercial não difere da massa gravitacional por mais que uma parte em um trilhão. Veja [2] para uma discussão sobre os resultados experimentais.

propunha que a matéria do universo agiria sobre este, de tal forma que os conceitos (ainda sob o âmbito da relatividade de Galilei) de “não-acelerado” só fariam sentido na presença de matéria. Einstein encarou este fato à luz de sua idéia: a presença de matéria (ou energia) *deformava* o espaço-tempo de tal forma que o seu conceito de distância (1), e desta forma o conceito de “curva sem aceleração” mudaria. Como exatamente se processa esta mudança será o objeto de estudo das próximas seções.

A Métrica Espaço-Temporal

Como primeiro passo para descrever a Gravitação como uma teoria geométrica, precisamos desenvolver algumas ferramentas para lidar com espaços cujo conceito de distância depende do ponto particular do espaço. Iniciemos com um raciocínio diferencial, então. A forma infinitesimal de (1) é (faremos $c = 1$ daqui em diante):

$$ds^2 = -(dt)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (2)$$

Lembremos agora o primeiro postulado da Relatividade Geral: em um ponto qualquer do espaço-tempo, digamos P , podemos escolher um sistema de coordenadas em queda livre, no qual a distância infinitesimal será dada pela fórmula acima. Neste ponto P , em particular, a distância será sempre dada por (2), mas em um ponto qualquer ela será em geral diferente, dada por:

$$ds^2 = \sum_{\mu\nu} g(P)_{\mu\nu} (dx)^\mu (dx)^\nu = \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ g_{xt} & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yt} & g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zt} & g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Onde, para cada ponto P do espaço-tempo, podemos introduzir uma mudança de base que traz $g(P)_{ab}$ para a forma “canônica” (2). g_{ab} é assim o que os matemáticos chamam de matriz associada a uma *aplicação bilinear com assinatura* $(-, +, +, +)$. Como g_{ab} é diagonalizável, deve também ser simétrica: $g_{ab} = g_{ba}$, e como não há direções nulas no espaço-tempo, deve ser não-degenerada. O símbolo g_{ab} é chamado de **métrica**. É costumeiro suprimir o símbolo de somatório em (3), de forma que a soma sobre índices repetidos em uma expressão é subentendida. Vamos fazê-lo de agora em diante.

O Conceito de Variedade Diferenciável

Vamos evitar neste curso de introdução uma tática de “baixo para cima”, definindo conceitos com um caráter mais matemático, como topologia e diferenciabilidade, e usar da intuição para definir o que entendemos por espaço-tempo. O preceito físico de que tenhamos um espaço que “pareça com o espaço de Minkowski” *localmente* será nosso ponto de partida para uma generalização do conceito de espaço-tempo que introduzimos na parte anterior. Podemos pensar que ao construir um espaço-tempo, estamos apenas “juntando” as experiências de inúmeros observadores inerciais, e esta união se dá segundo regras mínimas para que a construção seja consistente.

Assim, o nosso espaço-tempo, é uma “colagem” de inúmeras pequenas partes de espaços-tempo de Minkowski, de tal forma que se possa comparar a medição feita em um deles com a medição feita em outrem. Para fazer um melhor paralelo com o seguir do curso (e com a matemática), vamos por enquanto evitar o uso da métrica associada ao espaço de Minkowski e

falar apenas de coordenadas, ou seja, vamos falar apenas de espaços cuja topologia é localmente \mathbb{R}^n . Tais espaços são um tipo especial de *espaço topológico* e será nosso ponto de partida para uma definição mais rigorosa.

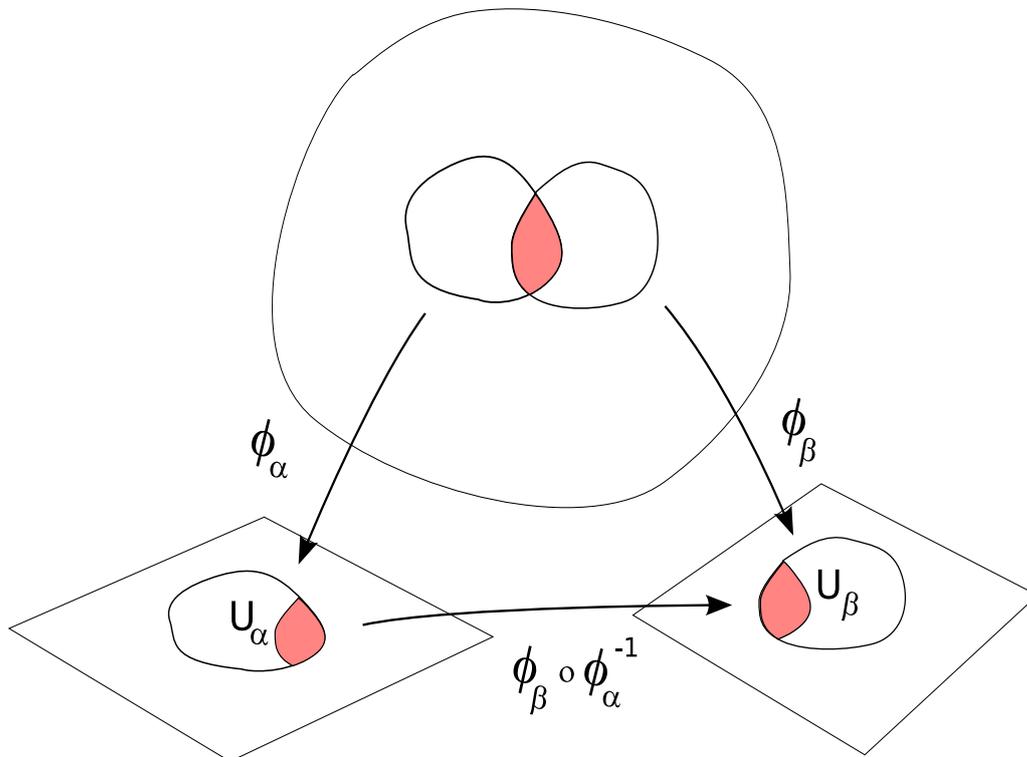


Figura 1: Duas cartas ϕ_α e ϕ_β são compatíveis quando $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$, visto como uma aplicação de um aberto do \mathbb{R}^n em outro, for contínua e diferenciável.

Repetindo o parágrafo anterior com uma linguagem mais precisa², vamos primeiro formalizar a estrutura local: se U é um conjunto aberto de \mathbb{R}^n , então considere uma função φ de U em um espaço topológico \mathcal{M} . Se tal função for contínua, injetiva (“1 a 1”) e sobrejetiva dentro de uma imagem $W = \varphi(U) \subset \mathcal{M}$, e sua inversa for contínua, então chama-se φ de *homeomorfismo* entre U e W . A função inversa $\phi = \varphi^{-1} : W \rightarrow U$ é chamada de *mapa*. Note que neste caso o espaço topológico em questão, ou ao menos um seu subconjunto W herdará os conceitos de limite e diferenciabilidade de \mathbb{R}^n . Desta forma os espaços topológicos que consideraremos serão chamados localmente \mathbb{R}^n .

Passemos agora à estrutura global. Precisamos cobrir nosso espaço topológico com cartas de forma consistente. Precisamos então de um *atlas*, ou seja, um conjunto de abertos da variedade topológica M , chamados $\{W_\alpha\}$ e de cartas $\{\phi_\alpha\}$ de $\{W_\alpha\}$ em um conjunto de abertos do \mathbb{R}^n , $\{U_\alpha\}$, que recubram \mathcal{M} e que sejam *compatíveis dois a dois*. Isto acontece quando consideramos a *função de transição* $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$, que é uma aplicação de um aberto do \mathbb{R}^n , especificamente $U_\alpha \cap U_\beta$, nele mesmo. O atlas é então compatível se todos $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ forem homeomorfismos diferenciáveis, ou seja *difeomorfismos*. Veja a Figura 1 para uma ilustração de duas cartas e da condição de compatibilidade. Note que $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ é agora uma aplicação entre abertos do \mathbb{R}^n , que podem assim ser diferenciadas repetidamente. Se estas funções de

²Vamos seguir de forma mais ou menos fiel a ótima introdução à Variedades Diferenciáveis que pode ser encontrada no livro [3]. O leitor mais inclinado à matemática pode verificar os primeiros capítulos de [4].

abertos do \mathbb{R}^n forem diferenciáveis n vezes, então chama-se o atlas de C^n -atlas. Se tais funções forem analíticas, chama-se o atlas de C^ω -atlas.

Dados dois atlas de um mesmo espaço topológico \mathcal{M} , pode-se estender a condição de compatibilidade dois a dois acima, agora entre cartas de atlas diferentes. Podemos agora então entender um determinado atlas como uma *classe de equivalência*, ou seja, como um representante do conjunto de atlas compatíveis. Uma *variedade diferenciável* é então um espaço topológico \mathcal{M} , munido de uma classe de equivalência de atlas (ou de C^n -atlas). No caso de C^ω -atlas, chamamos a variedade de *variedade analítica*.

Intuitivamente, podemos ver um mapa como uma “colagem” de uma parte do \mathbb{R}^n no nosso espaço topológico \mathcal{M} , e a condição de compatibilidade implementa a idéia de “aparo de arestas”. Quando se considera o aberto de \mathbb{R}^n como uma coleção de números reais $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, o mapa acima também é chamado de *sistemas de coordenadas*. Como toda construção matemática, pode-se clarificar a noção de variedade diferenciável através de exemplos, o que faremos em seguida.

Exemplos de Variedades Diferenciáveis

Começemos com um exemplo absolutamente trivial.

1: \mathbb{R}^n

Onde o atlas contém apenas um aberto, o próprio \mathbb{R}^n , e apenas uma aplicação, a *inclusão*:

$$i(\{x_1, \dots, x_n\}) = \{x_1, \dots, x_n\}. \quad (4)$$

2: S^1

S^1 é definido como uma circunferência, isto é, os pontos de \mathbb{R}^2 que satisfazem

$$x_1^2 + x_2^2 = r^2, \quad (5)$$

onde r é o seu raio. Note que não estamos definindo S^1 como um conjunto abstrato, mas sim como um subconjunto de \mathbb{R}^2 . Dotar S^1 de uma estrutura de variedade diferenciável usando a estrutura já existente para \mathbb{R}^2 é equivalente a dizer que S^1 é uma *subvariedade* de \mathbb{R}^2 . A inclusão $\phi : S^1 \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é neste caso chamada *mergulho*.

Note que para munir S^1 com a estrutura de variedade diferenciável, precisamos de cartas, ou seja de funções bijetoras entre o círculo e abertos da reta \mathbb{R}^1 . Podemos pensar que a parametrização

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (6)$$

servirá, pois realmente leva um número real, θ , no círculo. Isto porém continua insatisfatório: o ponto $\theta = 0$ tem a mesma imagem do ponto $\theta = 2\pi$, e a definição menciona explicitamente que as cartas devem envolver abertos de \mathbb{R}^n . A solução é considerar duas aplicações:

$$\phi_1(\theta) = \begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}, \quad \phi_2(\psi) = \begin{cases} x_1 = -r \sin \psi \\ x_2 = r \cos \psi \end{cases}, \quad \theta, \psi \in (0, 2\pi). \quad (7)$$

Onde se pode ver que na interseção entre as duas imagens, a condição de compatibilidade é respeitada: $\phi_2^{-1}(\phi_1(\theta)) = \theta + \pi/2$, que não só é diferenciável como é analítica.

3: S^n

Da mesma forma que a circunferência pode ser munida de uma estrutura de variedade diferenciável, ou na verdade de subvariedade de \mathbb{R}^2 , a *n-esfera*, definida como o subespaço de \mathbb{R}^{n+1} tal que

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = R^2, \quad (8)$$

é uma subvariedade de \mathbb{R}^{n+1} . O atlas é feito de maneira análoga ao caso $n = 1$, mas usando projeções estereográficas. Deixaremos o caso $n = 2$ como exercício.

4: $T^2 = S^1 \times S^1$

O *toro* é o subespaço de \mathbb{R}^4 que satisfaz:

$$x_1^2 + x_2^2 = r_1^2, \quad \text{e} \quad x_3^2 + x_4^2 = r_2^2. \quad (9)$$

Este espaço é mais conhecido por seu mergulho em \mathbb{R}^3 (a câmara de pneu):

$$x_1 = (r_1 + r_2 \cos \psi) \cos \theta, \quad x_2 = (r_1 + r_2 \cos \psi) \sin \theta, \quad x_3 = r_2 \sin \psi. \quad (10)$$

Temos então duas alternativas para munir o toro de uma estrutura de variedade diferenciável, escolheremos a primeira acima. Note que podemos simplesmente neste caso usar o atlas que obtivemos acima para S^1 . De fato, se juntarmos duas cópias idênticas de (7):

$$(\phi_1(\theta_1), \phi_1(\theta_2)), \quad (\phi_1(\theta_1), \phi_2(\psi_2)), \quad (\phi_2(\psi_1), \phi_1(\theta_2)), \quad (\phi_2(\psi_1), \phi_2(\psi_2)), \quad (11)$$

teremos o que se chama de *variedade produto*. Esta observação explica a identificação $T^2 = S^1 \times S^1$. Pode-se em geral construir desta forma uma estrutura de variedade diferenciável para o espaço $M \times N$ a partir dos atlas de M e N .

Um comentário final que deve ser lembrado: ao contrário do espaço Euclidiano normal, que tem um produto interno “natural”, a variedade diferenciável em geral não possui um produto interno associado. Isto ressoa com a idéia do princípio de Mach, visto acima: se impuséssemos a noção de produto interno Euclidiano à variedade diferenciável, não teríamos qualquer esperança de modelar o espaço-tempo que vivemos usando esta ferramenta matemática. Assim, é importante manter em mente que o espaço \mathbb{R}^n que usaremos como sistema de coordenadas **não terá nenhum caráter métrico**, e será assim apenas uma n -upla de números.

Velocidades e Vetores

Outro conceito fundamental para a descrição de partículas no espaço-tempo são a *velocidade*³. Neste caso podemos usar de um pouco de intuição e imaginar trajetórias em nosso espaço-tempo. Suponha que tal curva passe por um ponto P . De novo, temos uma idéia intuitiva de que a velocidade da partícula no ponto P é um vetor: partículas passam por P com diferentes direções e rapidez variável. Podemos então inverter o raciocínio e definir um *vetor sobre P* como a velocidade de uma (classe de equivalência) das curvas que passem por P .

Vamos agora passar à formalização desta idéia. Uma *curva* na variedade \mathcal{M} é dada por uma função:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}.$$

³O que entendemos por velocidade deste ponto em diante foi o que chamamos 4-velocidade quando tratamos de relatividade restrita.

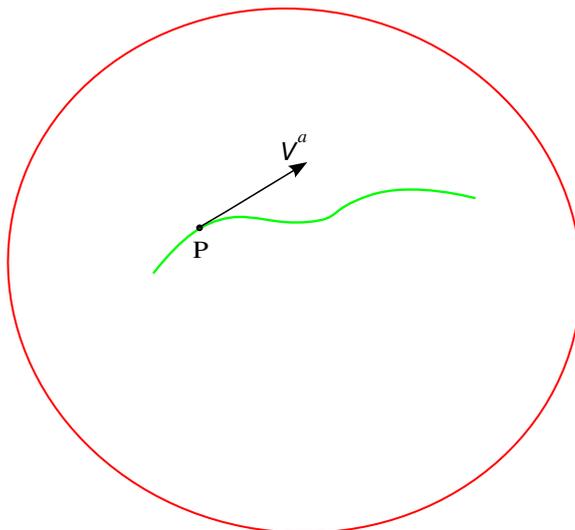


Figura 2: Como construir um vetor em um espaço-tempo curvo. A curva desenhada pode ser vista como a trajetória de uma partícula, e sua velocidade no ponto P é o vetor V^a .

Porém, como queremos calcular a velocidade desta curva em um ponto $P \in \mathcal{M}$, não precisamos da curva inteira, mas apenas de um segmento que passe por P . Digamos que $f(0) = P$, então podemos substituir a reta real no domínio de f por um intervalo aberto $(-\epsilon, \epsilon)$. Se há um mapa ϕ de \mathcal{M} que contenha o ponto P , podemos então pensar na composição

$$\begin{aligned} \phi \circ f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \phi(f(t)) &= \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\} \end{aligned} \quad (12)$$

como uma curva em \mathbb{R}^n . O *vetor velocidade da curva f em P segundo o mapa ϕ* é então definido como a derivada de $\phi(f(t))$ para $t = 0$:

$$\left. \frac{d(\phi \circ f)}{dt} \right|_{t=0} = \left\{ \left. \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right|_{t=0} \right\}. \quad (13)$$

Note, contudo, que esta definição ainda padece do mal de depender explicitamente do mapa que escolhermos ϕ . Vamos agora mostrar que a definição é na verdade bem posta pois a escolha de outro mapa ϕ' equivale a escolher outro sistema de coordenadas. De fato,

$$\left. \frac{d(\phi' \circ f)}{dt} \right|_{t=0} = \left\{ \left. \frac{dx'_1}{dt}, \dots, \frac{dx'_n}{dt} \right|_{t=0} \right\} = \left\{ \left. \sum_{i=1}^n \frac{\partial x'_1}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}, \dots, \sum_{i=1}^n \frac{\partial x'_n}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right|_{t=0} \right\} \quad (14)$$

conforme nos dita o teorema fundamental do cálculo de multivariáveis. O leitor vai reconhecer que os termos em derivada parcial são as componentes das derivadas das funções de transição $\phi' \circ \phi^{-1}$, vistas como aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , conforme visto acima.

Como tínhamos antecipado na nossa discussão sobre relatividade restrita, vamos distinguir o vetor velocidade no ponto P , a quem chamaremos $V^a|_P$, da sua representação em coordenadas, que usamos acima para escrevê-los de forma explícita. Neste último caso denotaremos o vetor por $V^\mu|_P$, e a regra (14) pode ser escrita sinteticamente por:

$$V^\mu|_P = \sum_{\nu=1}^n \left. \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|_P V^\nu|_P. \quad (15)$$

Esta ambiguidade da definição de $V^\mu|_P$ serve para a definição familiar de vetor.

Outra maneira de encarar um vetor é pelo conceito de *derivada direcional*. Se tivermos uma função g da variedade \mathcal{M} nos números reais, e f for uma curva em M como na definição anterior, a composição é uma função ordinária de \mathbb{R} em \mathbb{R} . A *derivada direcional* de g na direção da velocidade de f no ponto $P \in M$ é dada por:

$$V(g)|_P = \left. \frac{d(f(t) \circ g)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (16)$$

Note que esta definição na verdade é melhor em termos de rigor que a anterior, pelo fato de não depender da carta que usamos para representar o ponto P em termos de coordenadas. A definição (16) recobra a definição anterior (13), se escolhermos como funções g todas as coordenadas $\{x_i\}$ do ponto P .

Além de mais elegante, a definição (16) é mais interessante por mostrar uma estrutura escondida dos vetores. Note que, como a função g tem sua imagem nos números reais, então podemos definir somas e multiplicação por constantes de funções da variedade \mathcal{M} . A derivada direcional de tal soma é

$$V(Ag_1 + Bg_2)|_P = \left. \frac{d(f(t) \circ (Ag_1 + Bg_2))}{dt} \right|_{t=0} = AV(g_1)|_P + BV(g_2)|_P \quad (17)$$

um operador linear ou *funcional linear*, pois nesse caso o resultado da operação é um número real. O mesmo funciona com a soma de duas derivadas direcionais, pois $f(t) \circ g$ é um número real e assim $f_1(t) \circ g + f_2(t) \circ g$ pode ser definido. Esta última soma implica que:

$$(\alpha V_1 + V_2)(g)|_P = \left. \frac{d(f_1(t) \circ g + f_2(t) \circ g)}{dt} \right|_{t=0} = \alpha V_1(g) + V_2(g) \quad (18)$$

Por último, note que a multiplicação de duas funções também tem sua derivada direcional conhecida, por meio da regra de Leibnitz:

$$V(g_1 \cdot g_2) = \left. \frac{d(f \circ (g_1 \cdot g_2))}{dt} \right|_P = V(g_1)g_2 + g_1V(g_2). \quad (19)$$

Para resumir, a definição que daremos de vetor é a de um funcional linear de funções da variedade nos números reais, que nos retorna outra tal função: a derivada direcional do seu argumento. Como representa uma derivação, requeriremos que tal funcional linear satisfaça a regra de Leibnitz. Assim, V é vetor se

$$\begin{aligned} V(g_1 + g_2) &= V(g_1) + V(g_2), \\ V(g_1 \cdot g_2) &= V(g_1)g_2 + g_1V(g_2) \end{aligned} \quad (20)$$

para quaisquer duas funções g_1 e g_2 da variedade nos números reais.

A coleção de todos os vetores em P construídos desta forma é chamada de *espaço tangente* a P e representada pelo símbolo $T_P\mathcal{M}$. É claro da definição de $T_P\mathcal{M}$ que este é um espaço vetorial, no sentido que podemos adicionar vetores e multiplicá-los por escalares.

Note que podemos inverter o raciocínio que usamos para definir vetores acima: se acharmos todas as derivadas direcionais de uma função fixa g , podemos definir um funcional linear dg do espaço de vetores nos números reais:

$$\begin{aligned} dg : T_P\mathcal{M} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ dg(V) &= V(g) \end{aligned} \quad (21)$$

Note a similaridade de tal operação com a definição de gradientes dos cursos de cálculos de multivariáveis. A aplicação dg definida desta forma justifica o nome de *gradiente da função* g que lhe daremos.

O contato com a definição anterior fica claro agora. Se x^μ é a função que nos retorna a μ -ésima coordenada do ponto P , então a derivada direcional de V^a na direção da coordenada x^μ é a μ -ésima coordenada do vetor:

$$V(x^\mu)|_P = V^\mu|_P. \quad (22)$$

Da mesma forma, o gradiente da função x^μ age em vetores nos retornando a componente μ deste último:

$$dx^\mu(V) = V(x^\mu) = V^\mu|_P, \quad (23)$$

e o gradiente de uma função genérica pode ser calculada por meio da regra da cadeia:

$$(dg)(V) = V(g) = \left. \frac{\partial g}{\partial x^\mu} V^\mu \right|_P \quad (24)$$

Inspirados nessas propriedades, representaremos a derivada direcional então por:

$$V(g) = V^a(dg)_a|_P \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

onde explicitamos a independência de tal operação das coordenadas, denotando vetores e gradientes pelo índice latino a ao invés do índice grego μ . A distinção parece sutil mas na verdade é crucial, como iremos ver no exemplo abaixo. A operação onde repetimos os índices abstratos superiores e inferiores é denominada *contração*, definida da forma que se segue. Se V^a é um vetor, e $(dg)_a$ um gradiente, então o produto dos dois

$$V^a(dg)_b \quad (26)$$

é uma aplicação linear que leva vetores em vetores a cada ponto P de \mathcal{M} . Tal aplicação será representada por uma matriz $V^\mu(dg)_\nu$ em um sistema de coordenadas específico. A contração é definida como o traço dessa matriz, que, como nos ensina a álgebra linear, é uma propriedade da aplicação independente de coordenadas.

Para resumir, a aplicação linear V^a , definida sem menção à base na qual a escrevemos é chamada *vetor no ponto* P . Da mesma forma, chama-se o símbolo $(dg)_a$ de *gradiente da função* g . O vetor V^a pode ser alternativamente visto como *um funcional linear dos gradientes de funções da variedade*.

Agora que temos uma definição satisfatória de vetores, podemos definir gradientes de modo geral. Assim, se V^a é um vetor em P , uma 1-forma ω_a é um símbolo que age por contração em um vetor e retorna um número real

$$\omega_a V^a|_P \in \mathbb{R} \quad (27)$$

assim, uma 1-forma é um *funcional linear* do espaço de vetores em P . O espaço de todas as 1-formas é chamado de *espaço cotangente* a P e é representado pelo símbolo $T_P^*\mathcal{M}$. Tal espaço também é um espaço vetorial, chamado também de *espaço dual* a $T_P\mathcal{M}$. Note que nem sempre é possível escrever uma 1-forma como um gradiente de uma função. Por exemplo, no espaço euclidiano isto significa dizer que nem todo campo vetorial é o gradiente de uma função. Vamos esclarecer este ponto mais abaixo.

Dadas n coordenadas $\{x^\mu\}$ que especificam o ponto P , teremos então uma base de gradientes $\{(dx^\mu)_a\}$. Dada esta base de gradientes, podemos introduzir uma base de vetores

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \Big|_P$$

de tal forma que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^a (dx^\mu)_a \Big|_P = \delta_\nu^\mu \quad (28)$$

tal base é chamada de *base dual* e será de suma importância no que se segue.

Exemplo Completamente Trivial: O espaço de Minkowski

Não é usual começar revisitando o espaço de Minkowski, mas este é um passo necessário para que nos acostumemos a pensar nas definições das últimas seções de forma abstrata. O espaço de Minkowski é uma variedade topológica, denotada por $R^{3,1}$. Seu atlas é a função de inclusão:

$$\{t, x, y, z\} \in \mathbb{R}^4, \quad (29)$$

a base de gradientes são as 1-formas:

$$\{(dt)_a, (dx)_a, (dy)_a, (dz)_a\}. \quad (30)$$

Onde podemos expandir um gradiente via a regra da cadeia usual:

$$(df)_a = \frac{\partial f}{\partial t}(dt)_a + \frac{\partial f}{\partial x}(dx)_a + \frac{\partial f}{\partial y}(dy)_a + \frac{\partial f}{\partial z}(dz)_a. \quad (31)$$

E a base dual de vetores é

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \right\}, \quad (32)$$

com (28) trivialmente satisfeito. Note que não explicitamos o ponto P do espaço de Minkowski que usamos para calcular os elementos da base. Isto é uma característica do espaço de Minkowski, com coordenadas escolhidas acima, que é topologicamente igual ao espaço euclidiano, e assim só necessita de um mapa para ter a estrutura de variedade diferenciável. Assim a base de $T_P^*\mathbb{R}^{3,1}$ e $T_P\mathbb{R}^{3,1}$ serão as dadas acima para qualquer ponto do $\mathbb{R}^{3,1}$.

Referências

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc (1972).
- [2] Jean-Philippe Uzan, *The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 403, [[arXiv:hep-ph/0205340](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0205340)].
- [3] V. I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir, 1985; alternativamente, pode-se consultar do mesmo autor *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, (1989), §18;
- [4] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides – LTC (1988);

- [5] L. Landau e E. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 2: Teoria do Campo*, Editora Mir, (1980);
- [6] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [7] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, [[arXiv:gr-qc/9712019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019)], ou *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).
- [8] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).