Introdução à Relatividade Geral

1º Exercício Escolar - 25/08/2006

Questão 1: Como vimos em classe, o tensor energia-momento de um fluido isotrópico e homogêneo é dado por:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b) \tag{1}$$

onde ρ é sua densidade de energia, P sua pressão e u^a a 4-velocidade normalizada do fluido. η_{ab} é a métrica de Minkowski.

(a) Escreva as componentes do tensor em um sistema de coordenadas em que a 4-velocidade normalizada seja dada por $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$.

(b) Assuma que o fluido satisfaz uma equação de estado $P = w\rho$, com w constante. Ache os valores de w para os quais a *condição forte de energia*

$$T_{ab}u^a u^b \geq -\frac{1}{2}T \tag{2}$$

é satisfeita. $T = T^a_a = T^{ab}\eta_{ab}$ é o traço de T_{ab}.

(c) Mostre que, se um observador segue uma curva integral de um vetor de Killing v^a, então a corrente de fluido observada por ele $J_a = T_{ab}v^b$ tem 4-divergente nulo.

Questão 2: Considere a variedade bidimensional com métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \tag{3}$$

Ache a equação diferencial da órbita (isto é, $r(t)$) para geodésicas do tipo nulo, e esboce as soluções no plano $r - t$ para $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. Mostre que a curva $f(r) = 0$ não pode ser atravessada por estas geodésicas com t finito.

Questão 3: Seja $g_{ab}(s)$ uma família a um parâmetro de métricas <u>riemannianas</u> em uma variedade bi-dimensional. Mostre que a equação do *fluxo de Ricci*,

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial s} = -2R_{ab}, \tag{4}$$

pode ser reduzida, em coordenadas conformes, à equação de condução do calor:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \nabla_a \nabla^a T, \tag{5}$$

onde $\nabla_a \nabla^a$ é o operador laplaciano associado à métrica g_{ab}. Ache T como função das componentes da métrica. Com base na sua intuição sobre as soluções da equação de calor, o que você pode dizer sobre curvatura escalar no regime $s \to \infty$, nos dois casos distintos em que área total da superfície

$$A = \int \sqrt{g}\ d^2x \tag{6}$$

é finita e infinita?