Introdução à Relatividade Geral

1º Exercício Escolar - 25/08/2006 - Gabarito

Questão 1: Como vimos em classe, o tensor energia-momento de um fluido isotrópico e homogêneo é dado por:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b) \tag{1}$$

onde ρ é sua densidade de energia, P sua pressão e u^a a 4-velocidade normalizada do fluido. η_{ab} é a métrica de Minkowski.

(a) Escreva as componentes do tensor em um sistema de coordenadas em que a 4-velocidade normalizada seja dada por $u^\mu = (\gamma, \gamma\mathbf{v})$.

Resposta: Sejam respectivamente t^a e x^a o vetor tipo-tempo e um vetor tipo espaço no sistema de coordenadas acima. Por inspeção direta, temos:

$$\boxed{\begin{aligned} T_{tt} &= t^a T_{ab} t^b = \frac{\rho + P\mathbf{v}^2}{1-\mathbf{v}^2} \\ T_{ti} &= t^a T_{ab} x^b = (\rho + P)\frac{\mathbf{v}_i}{1-\mathbf{v}^2} \\ T_{ij} &= x^a T_{ab} x^b = P\delta_{ij} + (\rho + P)\frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j}{1-\mathbf{v}^2} \end{aligned}} \tag{2}$$

(b) Assuma que o fluido satisfaz uma equação de estado $P = w\rho$, com w constante. Ache os valores de w para os quais a *condição forte de energia*

$$T_{ab} u^a u^b \geq -\frac{1}{2} T \tag{3}$$

é satisfeita. $T = T^a_a = T^{ab}\eta_{ab}$ é o traço de T_{ab}.

Resposta: Note que agora T_{ab} está contraído com o próprio u^a, e não com t^a como no item anterior. Como u^a é normalizado, $u_a u^a = -1$, e teremos:

$$T_{ab} u^a u^b = \rho (u_a u^a)^2 + P((u_a u^a) + (u_a u^a)^2) = \rho + P(-1+1) = \rho$$
$$T = \eta^{ab} T_{ab} = \rho(u_a u^a) + P(\eta_{ab}\eta^{ab} + (u_a u^a)) = -\rho + P(4-1) = -\rho + 3P.$$

Como a equação de estado vale, $P = w\rho$, e a condição forte e energia implicará:

$$\rho \geq -\frac{1}{2}(-\rho + 3P) \quad \Longrightarrow \quad \rho \geq -3P$$

o que será verdade se

$$\boxed{\omega \geq -\tfrac{1}{3}}, \tag{4}$$

pois $\rho \geq 0$.

(c) Mostre que se um observador segue uma curva integral de um vetor de Killing v^a, então a corrente de fluido observada por ele $J_a = T_{ab} v^b$ tem 4-divergente nulo.

Resposta: Como v^a é um vetor de Killing, $\nabla^a v^b + \nabla^b v^a = 0$. Como T_{ab} é simétrico, teremos

$$\nabla^a J_a = \nabla^a (T_{ab} v^b) = (\nabla^a T_{ab}) v^b + T_{ab} \nabla^a v^b.$$

O primeiro termo se anula pela conservação do tensor energia-momento. O segundo termo pode ser escrito:

$$T_{ab}\nabla^a v^b = \frac{1}{2}(T_{ab}\nabla^a v^b + T_{ba}\nabla^b v^a) = \frac{1}{2}(T_{ab}\nabla^a v^b + T_{ab}\nabla^b v^a) = \frac{1}{2}T_{ab}(\nabla^a v^b + \nabla^b v^a) = 0 \qquad (5)$$

pela simetria do tensor energia-momento e pela equação de Killing. Assim, $\boxed{\nabla^a J_a = 0}$ e o resultado segue.

Questão 2: Considere a variedade bidimensional com métrica:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} \qquad (6)$$

Ache a equação diferencial da órbita (isto é, $r(t)$) para geodésicas do tipo nulo, e esboce as soluções no plano $r - t$ para $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. Mostre que a curva $f(r) = 0$ não pode ser atravessada por estas geodésicas com t finito.

Resposta: Conforme vimos em classe, para a métrica acima o vetor $t^a = (\partial_t)^a$ que gera translações temporais é um vetor de Killing, pois nenhuma das suas componentes depende explicitamente de t. Assim, se k^a é o vetor normalizado tangente à geodésica nula, temos que $t^a k_a$ é uma constante de movimento:

$$t^a k_a = g_{ab}t^a k^a = -f(r)\dot{t} = -E$$

onde $\dot{t}$ denota derivação em relação ao tempo próprio. Substituindo isto na condição de geodésica nula, teremos:

$$ds^2 = 0 = -f(r)\frac{E^2}{f(r)^2} + \frac{\dot{r}^2}{f(r)}.$$

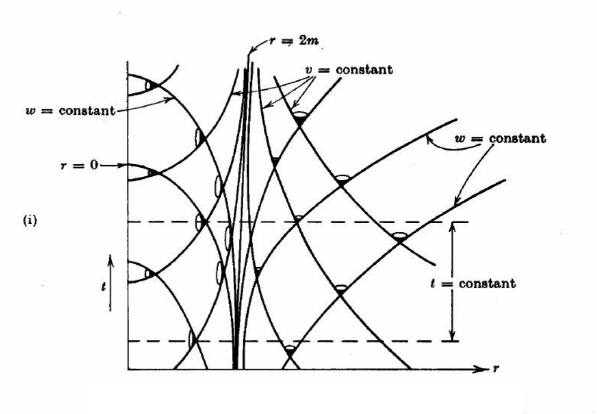
Que resulta a seguinte equação para $\dot{r}$:

$$\dot{r} = \pm E$$

Usando a regra da cadeia, teremos a equação procurada para as órbitas:

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{\dot{r}}{\dot{t}} = \pm f(r)} \qquad (7)$$

Para $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ o gráfico das órbitas torna-se igual ao visto na lista de exercícios:



Para mostrar que a curva $f(r) = 0$ não pode ser atravessada, escreva (7) na forma:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{1}{2}f(r)^2 = 0$$

que pode ser interpretado como uma partícula com massa unitária e energia nula que se move sob a ação do potencial

$$V_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} f(r)^2.$$

Assim o "ponto" no qual $f(r) = 0$ é um ponto de retorno e não pode ser atravessado pela partícula.

Questão 3: Seja $g_{ab}(s)$ uma família a um parâmetro de métricas riemannianas em uma variedade bi-dimensional. Mostre que a equação do *fluxo de Ricci*,

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial s} = -2R_{ab}, \tag{8}$$

pode ser reduzida, em coordenadas conformes, à equação de condução do calor:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \nabla_a \nabla^a T, \tag{9}$$

onde $\nabla_a \nabla^a$ é o operador laplaciano associado à métrica g_{ab}. Ache T como função das componentes da métrica. Com base na sua intuição sobre as soluções da equação de calor, o que você pode dizer sobre curvatura escalar no regime $s \to \infty$, nos dois casos distintos em que área total da superfície

$$A = \int \sqrt{g}\; d^2x \tag{10}$$

é finita e infinita?

Resposta: Primeiro temos que calcular o tensor de Ricci para métricas conformes:

$$ds^2 = e^{2\omega(x,y)}(dx^2 + dy^2).$$

Isto foi feito na última lista de exercícios. Os símbolos de Christoffel são:

$$\Gamma^x_{xx} = -\Gamma^x_{yy} = \Gamma^y_{xy} = \partial_x \omega,$$
$$\Gamma^y_{yy} = -\Gamma^y_{xx} = \Gamma^x_{xy} = \partial_y \omega.$$

O tensor de Riemman pode ser encontrado a partir de sua única componente não-trivial:

$$R_{xyx}{}^y = -\partial_x \Gamma^x_{yy} + \partial_y \Gamma^x_{xy} + \Gamma^x_{xx}\Gamma^y_{xy} - \Gamma^x_{xy}\Gamma^x_{xy} + \Gamma^y_{xx}\Gamma^y_{yy} - \Gamma^y_{xy}\Gamma^x_{yy}$$
$$R_{xyx}{}^y = -(\partial_x^2 + \partial_y^2)\omega$$

E finalmente podemos contrair com a inversa da métrica para achar o tensor de Ricci:

$$R_{ab} = \frac{R}{2} g_{ab}, \qquad R = -2e^{-2\omega}(\partial_x^2 + \partial_y^2)\omega = -2e^{-2\omega}\Delta\omega$$

onde $\Delta\omega$ é o operador laplaciano em coordenadas cartesianas.

A equação do fluxo de Ricci se escreverá então como

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} = -2R_{ab} = -R g_{ab}$$

o que em componentes significa

$$2e^{2\omega}\frac{\partial \omega}{\partial s} = 2\Delta\omega \tag{11}$$

que precisa ser relacionado com o operador laplaciano na métrica g_{ab}. Usando a definição do enunciado:

$$\nabla_a \nabla^a \omega = g^{ab}\nabla_a \partial_b \omega = g^{ab}\partial_a \partial_b \omega + g^{ab}\Gamma^c_{ab}\partial_c \omega$$

o que desenvolvemos usando a definição de derivada covariante. Explicitando as componentes da expressão acima:

$$\nabla_a \nabla^a \omega = e^{-2\omega}\Delta\omega + e^{-2\omega}[(\Gamma^t_{tt} + \Gamma^t_{xx})\partial_t \omega + (\Gamma^x_{tt} + \Gamma^x_{xx})\partial_x \omega]$$

cuja última parcela se anula pois $\Gamma^t_{tt} = -\Gamma^t_{xx}$ e $\Gamma^x_{tt} = -\Gamma^x_{xx}$. Assim o laplaciano relacionado à métrica g_{ab} é justamente o lado esquerdo da equação (11), que pode ser escrita como no enunciado:

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = e^{-2\omega} \Delta \omega = \nabla_a \nabla^a \omega \tag{12}$$

A parte final da questão lida com argumentação, e não com provas rigorosas. Como sabemos da equação do calor, a temperatura tende a se "homogeneizar" nos sistemas, então se começarmos com uma métrica com peso conforme altamente não-homogênea, a tendência é que ω fique constante quando $s \to \infty$. Porém ω constante significa curvatura nula, o que pode estar relacionado à expansão de nossa variedade. De fato, quando tomamos o aumento do elemento de volume $\sqrt{g}$:

$$\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g} g^{ab} \frac{\partial g_{ab}}{\partial s} = -\sqrt{g} R = \Delta \omega$$

vemos que o volume aumenta para superfícies com curvatura negativa. Para cancelar este aumento da superfície, vamos adicionar um termo extra, proporcional à curvatura média, à equação do fluxo de Ricci:

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial s} = -2\left(R_{ab} - \frac{1}{2}\frac{\int \sqrt{g} R \; d^2x}{\int \sqrt{g} \; d^2x} g_{ab}\right) \tag{13}$$

que é de novo uma equação do calor com um termo extra, que pode ser pensado como fonte. O numerador do termo adicional

$$\int \sqrt{g} R \; d^2x = 2\pi \chi(g)$$

é um invariante topológico, chamado *número de Euler* da superfície e assim não se altera sob o fluxo de Ricci. O denominador, no limite de ω constante, é proporcional a $\sqrt{g} = e^{2\omega}$, e assim a solução estática, ao qual o sistema chegará quando $s \to \infty$ será da forma

$$\Delta \omega = K \chi(g) \tag{14}$$

onde K é uma constante. Assim, pode-se provar que *toda a superfície bidimensional admite uma métrica com curvatura constante.* Tal resultado é chamado *teorema da uniformização*, e sua versão tridimensional, provada pro G. Perelman em 2002, foi o tópico da Medalha Fields em matemática em 2006.