Introdução à Relatividade Geral

Notas de aula por Bruno Carneiro da Cunha

Parte 1: Relatividade Restrita

A Relatividade Pré-Einstein

A relatividade, em geral, é a consideração das *simetrias* do seu modelo físico. Historicamente, durante todo o século XX, as simetrias tem tido um papel fundamental no melhor entendimento das ações que regem o universo. A mecânica Newtoniana é assentada no conceito do que chamamos hoje de *Relatividade Galileiana*, cujo papel vamos relembrar hoje.

A equação fundamental da dinâmica

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{1}$$

nos dá a pista que precisamos para achar as representação matemática da Relatividade Galileiana. A aceleração, como se sabe, é a segunda derivada da posição. Sendo assim, as equações de movimento devem ser invariantes se mudarmos nosso sistema de referências de tal forma que a aceleração medida no novo sistema coincida com a antiga. Não é difícil intuir que uma solução será:

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t, \tag{2}$$

onde $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ são vetores constantes. Outra resposta, menos óbvia, são translações temporais:

$$t' = t + t_0. \tag{3}$$

Por trás destas transformações há a idéia, profunda, de que o universo é homogêneo: as leis da Física são as mesmas tanto aqui quanto no Sol quanto no outro lado do universo. A idéia da invariância temporal é a tradução matemática do princípio que as leis da Física são imutáveis.

Mas, isto é tudo? Bem, no. $\mathbf{F}$, na equação fundamental (1), é um vetor, e desta forma suas componentes não só dependem do sistema de referências que escolhemos, no sentido do parágrafo anterior, como também da *base de vetores* que escolhemos. Aqui há uma hipótese fundamental por trás da Mecânica Newtoniana: a de que o espaço possui um conceito de distância, ou *métrica*, dada por:

$$d(\mathbf{r},\mathbf{r}')^2 = (r_x - r'_x)^2 + (r_y - r'_y)^2 + (r_z - r'_z)^2 \tag{4}$$

Onde $r_{x,y,z}$ e $r'_{x,y,z}$ são as componentes das posições $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ em uma base *ortonormal* $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$. Por trás desta estrutura há a idéia que o espaço que vivemos tem a estrutura de um *espaço vetorial*, e que as posições das partículas são vetores. O conceito de distância, como dada por (4) é uma estrutura adicional do ponto de vista matemático, mas será para nós o ponto de partida para generalizações.

Para o que estamos discutir nesta seção, a pergunta que tínhamos sobre as componentes da Força, ou da aceleração, em (1) se traduz como: *como escolher a base ortonormal* $\mathbf{i}$*,* $\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{k}$*?* A resposta é que, como não há direção privilegiada no universo, a Física não pode depender da base que escolhemos para escrever suas leis. A transformação de coordenadas que ligam uma base ortonormal a outra distinta, no mesmo ponto, são chamadas de *transformações ortogonais*, e são representadas por matrizes O

$$\mathbf{r}' = \mathbf{O}\mathbf{r} \tag{5}$$

cuja inversa é igual à transposta $\mathbf{O}^{-1} = \mathbf{O}^T$. Tais matrizes sempre podem ser vistas como *rotações* do nosso espaço. Desta forma, tais matrizes podem sempre ser vistas como aquelas que mantém a distância (4) invariante. Como aludimos acima, estas transformações são resultado direto do conceito de *isotropia* do nosso espaço.

Para resumir, temos então as transformações gerais:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{O}\mathbf{r} + \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t \\ t' &= t + t_0 \end{aligned} \tag{6}$$

que ligam quaisquer dois referenciais inerciais. Tais transformações são chamadas de *transformações de Galilei*. Note que temos três tipos de rotações distintas, mais seis componentes dos nossos vetores $\mathbf{r}_0$ e $\mathbf{v}_0$ e mais uma escolha do tempo inicial t_0, perfazendo assim um total de 10 parâmetros para especificar nossa transformação. Além destas transformações contínuas, há também as transformações discretas: $t \to -t$ e $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, chamadas de reversões temporais e espaciais, respectivamente.

O princípio da Relatividade Galileiana é uma ferramenta extremamente poderosa para descrição dos sistemos físicos newtonianos. Ela pode simplesmente reduzir toda a dinâmica a princípios gerais. Suponha, por exemplo, que quiséssemos descrever o movimento de uma partícula livre, e para fazê-lo gostaríamos de associar uma função à trajetória da partícula. Como a cada ponto a partícula está bem localizada no espaço podemos escrever tal função como uma soma por todos os pontos que compem sua trajetória:

$$S = \int_{\text{trajetória}} L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t)\ dt. \tag{7}$$

Agora podemos aplicar a isto o princípio da relatividade galileiana para especificar a forma da função L. O princípio da homogeneidade nos diz que a forma de $\mathbf{r}$ não pode ser importante, pois ela depende do sistema de referência. Assim

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = 0. \tag{8}$$

Da mesma maneira, a dependência do tempo viola o princípio da imutabilidade das leis físicas:

$$\frac{\partial}{\partial t} L(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) = 0. \tag{9}$$

Assim, resta-nos a dependência na velocidade. Porém o conceito de isotropia nos diz que esta dependência também deve ser especial, pois não pode variar com rotações do espaço. Como a única propriedade de um vetor invariante sob rotações é seu comprimento, chegamos à seguinte forma para a função S:

$$S = \int_{\text{trajetória}} L(v^2). \tag{10}$$

Para velocidades pequenas, de se esperar que $L(v^2)$ tenha uma expansão em séries de Taylor:

$$L(v^2) = \alpha_0 + \alpha_1 v + \frac{1}{2}\alpha_2 v^2 + \dots, \tag{11}$$

cujos coeficientes ainda são passíveis de restrições, pelo princípio da invariância de reversões, que levam $v \to -v$. Assim, o primeiro termo não trivial para o deslocamento da partícula é o de segunda ordem:

$$L(v^2) \approx \frac{1}{2}\alpha_2 v^2 \tag{12}$$

Onde reconhecemos a expressão da energia cinética da partícula, e a constante α_2 tem agora a interpretação de massa, ou m na Segunda Lei (1). Por último, temos a invariância por mudança de referenciais com movimento relativo. A função S muda da seguinte maneira:

$$S' = \int \left(\frac{1}{2}mv^2 + m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_0 + \frac{1}{2}mv_0^2\right)\, dt \tag{13}$$

O termo constante não importa para a determinação da trajetória da partícula enquanto o termo $m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_0$ é uma derivada total:

$$S' - S = \int m\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{v}_0\, dt = m\mathbf{v}_0(\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i). \tag{14}$$

Assim, podemos especificar a trajetória impondo a condição extra que sabemos o deslocamento total da partícula, o que é aparentemente bastante razoável. As nossas imposições das simetrias básicas mostram que as equações de movimento são de fato uma consequência natural.

Outra implicação profunda das simetrias no movimento das partículas são as restrições nos tipos de interações entre dois corpos. Vamos tratar por simplicidade uma interação conservativa. O objeto de estudo principal é a energia potencial, vista como uma função das posições $U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$. Novamente, invariância por translações significam que a função na verdade da posição relativa das partículas: $U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = U(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$. Como no caso da energia cinética, a invariância por rotações nos diz que a função deve ser de fato apenas da distância entre as duas partículas: $U(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$. Chega-se desta forma ao conceito de força central.

Mesmo com o poder de predição que este método nos dá, não foi até o início do século XX que seu uso tornou-se comum na Física. Curiosamente, parte da sua utilidade se mostrou patente depois do trabalho de Einstein, o que na época levou a um comentário ácido de Lorentz que dizia que "ele simplesmente assumiu aquilo que estávamos querendo provar". Isto nos mostra que a real utilidade dos métodos de relatividade advém do fato que as transformações de coordenadas são tidas como gerais, permitindo que os mesmos métodos sejam aplicados em várias situações diferentes. Vamos agora nos ater à descrição do grupo de transformações de coordenadas importantes para a Relatividade Restrita, a saber, as transformações de Lorentz.

As transformações de Lorentz são as transformações que mantém invariantes a forma das equações de Maxwell, da mesma forma que as transformações de Galilei mantém invariante as leis de Newton. As equações de Maxwell

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\rho \\
\nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\
\nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 \\
\nabla\times\mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}
\end{aligned} \tag{15}$$

regem a interação entre matéria e o campo eletromagnético. A tensão que existe entre estas equações e a Relatividade Galileiana são explicitadas pela Lei de Coulomb:

$$\mathbf{E}_{\mathrm{C}}(\mathbf{r}) = \frac{q}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r} \tag{16}$$

que transformam da maneira usual segundo as transformações de Galilei (6), ao contrário das equações (15). De fato, as equações de Maxwell nos dizem uma coisa completamente diferente. Quando, por exemplo, mudamos o referencial,

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}_0 t \tag{17}$$

teremos agora não só uma distribuição de carga, como também uma distribuição de corrente:

$$\mathbf{J} = \sum_i e\rho \mathbf{v}_i, \tag{18}$$

o que gerará um campo magnético ao mesmo tempo que um campo elétrico. Para ilustrar o fenômeno, mostremos a forma dos campos gerados por uma partícula que se move a uma velocidade $\mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \left(\frac{\mathbf{E}_{\mathrm{C}}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{(\mathbf{E}_{\mathrm{C}}(\mathbf{r}') \times \mathbf{v})}{v^2} \times \mathbf{v} \right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}-\mathbf{v}t_{\mathrm{ret}}}, \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{19}$$

A expressão aparentemente complicada para $\mathbf{E}$ simplesmente nos diz que as componentes de $\mathbf{E}$ paralelas e perpendiculares à velocidade se transformam diferentemente, e que a componente perpendicular é "dilatada" pelo fator $\gamma = (\sqrt{1 - v^2/c^2})^{-1}$.

Mais importante para nossa discussão é o fato da expressão acima depender não da posição presente da partícula, mas sim da posição *no passado* $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t_{\mathrm{ret}}$. O *tempo retardado*, t_{ret}, é o tempo que a luz demora para cobrir a distância entre a trajetória da carga e o ponto no qual queremos calcular o campo elétrico no presente. Veja a Figura 1. A expressão para t_{ret} é

$$t_{\mathrm{ret}} = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} \left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{c^2} + \frac{1}{c}\sqrt{r^2 - \frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{v})^2}{c^2}} \right) \tag{20}$$

Isto demonstra que a separação do campo eletromagnético entre campos elétricos e magnéticos independentes é na verdade um artefato do sistema de referência que escolhemos. No cerne desta tensão entre relatividade galileiana e as equações de Maxwell está o fato que nas contas acima precisa-se usar de forma explicita o fato que o campo eletromagnético tem *uma velocidade de propagação finita*. Este fato é ilustrado pela equação que podemos derivar para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ na ausência de cargas.

De fato, calculando o rotacional da Lei de Ampère e usando a Lei de Faraday temos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \tag{21}$$

E, usando a identidade:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}, \tag{22}$$

junto com a Lei de Gauss para o magnetismo, teremos uma equação de onda para $\mathbf{B}$:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}, \tag{23}$$

assim como se calcularmos o rotacional da equação de Faraday, teremos a mesma equação para $\mathbf{E}$. Esta nos diz que as excitações do campo eletromagnético se propagam com uma velocidade finita, dada pela velocidade da luz c.

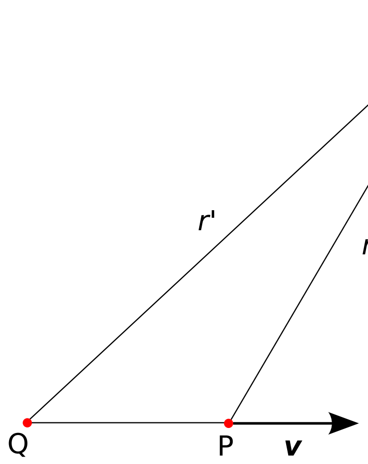

Figura 1: Diagrama para o cálculo do campo produzido por uma partícula em movimento. Como a luz tem uma velocidade finita, o ponto mais importante para efeito deste cálculo não é a posição P presente mas sim a posição "retardada" Q.

Isto nos dá uma clara ruptura com o conceito de relatividade galileiana, pois agora temos uma velocidade natural das excitações eletromagnéticas, o que não deveria ter significado fundamental pois velocidades podem ser modificadas segundo as transformações de coordenadas (17).

Mais que entender o porquê desta tensão, a questão que se apresenta agora é a determinação dos tipos de transformações de coordenadas que mantém as equações de Maxwell invariantes. A forma mais direta de fazê-lo é usar a intuição da óptica geométrica. Da forma usual da onda,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\left(\frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}{c} - \omega t\right) \tag{24}$$

vemos que, devido à equação de dispersão $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = c^2\omega^2$, a onda é na verdade uma função do *comprimento óptico*

$$s_{\pm} = ct \pm \hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r} \tag{25}$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário. Isto é uma propriedade geral: a solução da equação de onda é sempre uma solução de $s_{\pm}$ para algum $\hat{\mathbf{n}}$. Vale notar que o mesmo acontece em duas dimensões onde a solução geral da equação de onda é:

$$f(x+ct) + g(x-ct) = f(s_+) + g(s_-). \tag{26}$$

Para achar quais transformações mantém as equações de Maxwell invariantes devemos então achar quais equações mantém o comprimento óptico invariante. Rotações e translações estão na verdade claras na formulação que demos das leis do eletromagnetismo (15). O nosso problema parece ser a relação entre referenciais inerciais. Em ambas as soluções a frente de onda, ou o raio de luz, que passa na origem das coordenadas no tempo $t = 0$ se mantém no chamado *cone de luz*:

$$s^2 = c^2t^2 - \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = 0. \tag{27}$$

Usando a nossa analogia em duas dimensões, a transformação de coordenadas que deixa

$$\bar{s}^2 = c^2t^2 - x^2 \tag{28}$$

invariante é do tipo:

$$\begin{aligned} ct' &= ct\cosh\nu + x\,\mathrm{senh}\,\nu \\ x' &= x\cosh\nu + ct\,\mathrm{senh}\,\nu \end{aligned} \tag{29}$$

onde ν é um parâmetro real, chamado "rapidez", cuja interpretação postergaremos para a próxima seção. Para fazer a transformação geral em (27), devemos escolher uma direção no espaço $\mathbf{r}$ e aplicar a transformação acima, usando a coordenada nesta direção como x em (29). As transformações (29) são chamadas *"boosts" de Lorentz*. Elas, juntamente com as translações e rotações formam o que chamamos de *transformações de Poincaré*.

Tais tranformações foram consideradas pelo próprio Lorentz, além de Minkowski e Poincaré, antes de ter seu significado físico elucidado por Einstein. Grande parte do problema que a evidência de uma velocidade de propagação finita acarretaria para a física era a crença, que existia na época, que a "outra força fundamental", isto , a gravitação, tinha na verdade uma velocidade de propagação infinita. Assim, devido à esta crença, assumia-se que o caráter especial da velocidade da luz era na verdade devido ao fato que às oscilações do campo eletromagético serem oscilações de um meio omnipresente, denominado "éter". A velocidade de propagação "c" era então sempre relacionada a este referencial inercial especial, ao "éter".

À época, este parecia ser um argumento sólido.

Os postulados de Einstein

O que se seguiu a esta proposta foi uma sequência de malogradas tentativas em se detectar o movimento da Terra em função do éter, principalmente a série de medidas feitas por Michelson e Morley em 1887. Os 18 anos entre estas experincias e a solução de Einstein para o dilema foram de incrível desenvolvimento teórico, inclusive com a derivação de muito do que foi descrito na última seção. Tudo isso vai ser contudo omitido nesta série de aulas por ter interesse histórico mais que científico. Leitores interessados podem consultar a vasta literatura existente sobre o "ano miraculoso", cuja lista parcial pode ser encontrada em [1].

Einstein propôs que a tensão entre o conceito de relatividade galileiana e as transformações de Poincaré fosse resolvida de forma radical: que a relatividade galileiana fosse apenas uma aproximação da natureza, e que as transformações de Poincaré fossem de fato a simetria exata. Pelo que se expôs na última seção, a inadequação das transformações de Galilei nas equações de Maxwell devem-se ao fato das excitações eletromagnéticas se propagarem com velocidade finita. De fato, quando tomamos o limite $c \to \infty$ em (29), temos:

$$\begin{aligned} t' &\approx t + \frac{\nu}{c}x \\ x' &\approx x + ct\nu \end{aligned} \tag{30}$$

que corresponde a (17), em primeira ordem, se fizermos $\nu \approx v_0/c$. O cálculo para transformações finitas é similar, e o resultado bem conhecido:

$$\begin{aligned} ct' &= \frac{ct}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \frac{xv_0}{c\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \\ x' &= \frac{x}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} + \frac{v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \end{aligned} \tag{31}$$

As retas $t = 0$ e $x = 0$ no referencial $\mathcal{O}$ e $t' = 0$ e $x' = 0$ no referencial $\mathcal{O}'$ esto representadas na Figura 2. As transformações do tipo (31) são chamadas de *Transformações (ou "Boosts") de Lorentz*.

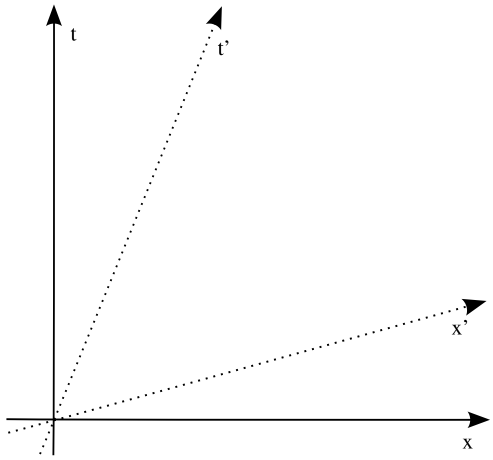

Figura 2: Dois referenciais inerciais em relatividade restrita, (t, x) e (t', x'). Note que as linhas t' e x' são ortogonais segundo a métrica (32).

Einstein então postulou que a transformação acima deveria substituir as transformações de referenciais galileianas (17). O argumento por trás desta escolha está fundamentado em um princípio bastante usado em nossos dias: o guia para a Física deve ser o que pode ser medido, e como esta medição é feita. Um relógio, um aparelho de medida de tempo, é um objeto que conta o número de picos nas oscilações da luz, enquanto medições de distância são feitas contando o tempo que a luz demora para cobrir uma distância equivalente. É um exercício saudável notar que mesmo medições feitas de maneira distintas são em última instância baseadas nestes princípios básicos. Isto levou Einstein a postular que a velocidade da luz era assim uma coisa mais fundamental que simplesmente a velocidade de propagação da luz; era sim uma espécie de "fator de conversão" entre o tempo e o espaço, que tm a *mesma natureza*. Esta forma do postulado da relatividade é a mais radical, mas também é a que mais se adequa à visão da natureza do tempo que vai ser preconizada durante o curso. Sobre testes experimentais deste e de outros postulados usados pela Relatividade de Einstein o leitor pode consultar o artigo [2].

Por outro lado, Einstein mantinha a visão dos físicos que o precederam de que as leis físicas não poderiam depender do referencial no qual as medidas são feitas. Dito de outra forma, as grandezas de relevância física devem se transformar de modo bem estabelecido segundo as transformações de coordenadas, de forma que um referencial saiba confrontar seus resultados com qualquer outro. Esta propriedade é chamada *covariância*, e é o segundo pilar da relatividade de Einstein.

Como agora o tempo foi promovido de parâmetro absoluto para uma coordenada com o mesmo caráter que as componentes do nosso conhecido vetor posição, $\mathbf{r}$, ele também deve ter uma propriedade métrica, e assim (4) não pode ser mais válida. O conceito de distância, na mecânica relativística, deve então ser modificado, de forma que a velocidade da luz tenha um caráter absoluto. Da mesma forma, vimos antes que as transformações de Poincaré deixam o cone de luz invariante. Por analogia, a quantidade que estamos procurando deve então ser:

$$d(P,Q)^2 = -c^2(t(P) - t(Q))^2 + (x(P) - x(Q))^2 + (y(P) - y(Q))^2 + (z(P) - z(Q))^2, \quad (32)$$

onde P e Q são dois "pontos" no que chamamos de *espaço-tempo*. Os pontos neste espaço-tempo têm não só "posições" $\mathbf{r}$ bem definidas, como também "posições temporais", t, bem-definidas. Este caráter "instantâneo" dos pontos no espaço tempo nos leva a chamá-los de *eventos*. A quantidade $\tau(P,Q)$ definida por $c^2\tau(P,Q)^2 = -d(P,Q)^2$ tem então, por definição, a interpretação de *intervalo* entre P e Q, por nos dar o "comprimento óptico" ("número de picos") de um referencial inercial que passe por estes dois pontos, assumindo-se que isto seja possvel, o que será visto com detalhe abaixo. Da mesma forma, a quantidade $d(P,Q)^2$ acima tem a interpretação direta de distância entre os dois eventos, quando esta for real. Dois eventos são chamados de *simultâneos* quando ocorrem com a mesma coordenata $t = t(P) = t(Q)$.

A escolha de sinais em (32) é normalmente representada por *métrica* $(-,+,+,+)$, onde a coleção de sinais é chamada de *signatura*. Alternativamente, pode-se representar a métrica acima com signatura $(-,+,+,+)$, que difere por um sinal geral, e tem exatamente os mesmos resultados físicos.

Nota-se de $\tau(P,Q)$ a partir de sua definição (32) que ele na verdade é máximo para partículas estacionárias, e que qualquer ponto que se mova chegará à superfície com $t \neq 0$ constante em menor tempo próprio. Este fato é chamado *dilatação dos tempos*. Sua contrapartida é que, como todos os observáveis devem medir a mesma velocidade da luz c, então uma dilatação dos tempos deve ser acompanhada de uma *contração dos comprimentos*. Estes fenômenos não serão vistos aqui por já fazerem parte do programa de física geral.

Vamos no que se segue usar $c = 1$. Vamos também usar a analogia bidimensional em muitos dos exemplos para evitar carregar demais a notação.

Dado um ponto fixo P, a métrica (32) divide o espaço em três regiões distintas, esquematizados na Figura 3:

I. $d(P,Q)^2 < 0$: São os pontos que podem ser alcançados a partir de P por um corpo que se mova a velocidade subluminosa. Nesse caso o tempo próprio de um referencial inercial que passa por P e Q medirá um tempo $\tau = \sqrt{-d^2(P,Q)}$ entre esses dois eventos.

II. $d(P,Q)^2 > 0$: Os pontos que não podem ser alcançados a partir de P por nenhum corpo que se mova a velocidade menor que c. Neste caso, um referencial no qual os eventos P e Q ocorrem simultaneamente medirá uma distância $\sqrt{d^2(P,Q)}$ entre eles.

III. $d(P,Q)^2 = 0$: O limite entre as regiões acima, os pontos que podem ser atingidos a partir de P apenas por raios de luz.

Quadrivetores e Fluidos

Trajetórias no espaço-tempo, ou "sequências de eventos", são curvas cujas coordenadas são dadas como funções de algum parâmetro s: $(t(s), x(s), y(s), z(s))$. Considere uma linha reta:

$$\begin{cases} t(s) = t_0 + u_t\, s \\ x(s) = x_0 + u_x\, s \\ y(s) = y_0 + u_y\, s \\ z(s) = z_0 + u_z\, s \end{cases} \tag{33}$$

Sabemos que tal linha reta tem na verdade velocidade constante. Isto pode ser explicitado ao notarmos que (33) nada mais é que a trajetória de uma partícula "parada"

$$t(s) = s, \qquad \mathbf{r}(s) = 0, \tag{34}$$

sobre a qual aplicamos uma transformação de Lorentz e uma translação. A *4-velocidade* da partícula

$$(u_t, u_x, u_y, u_z) \tag{35}$$

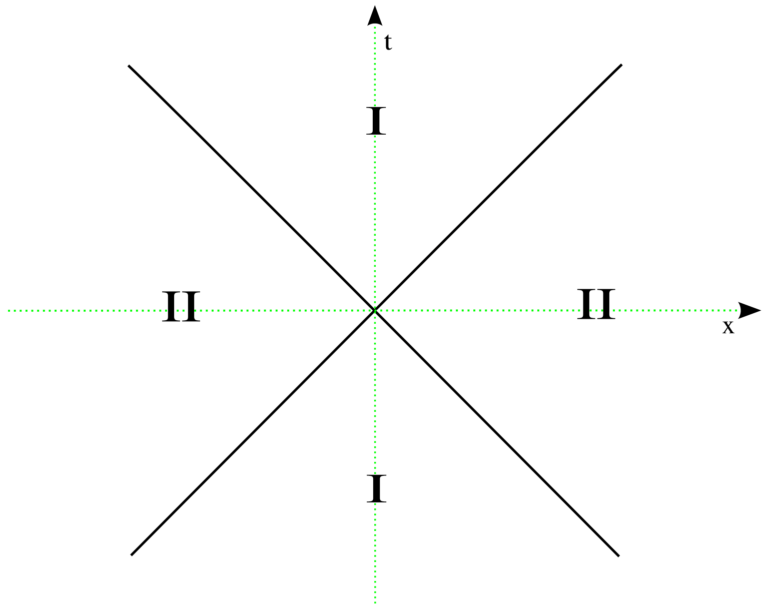

Figura 3: As três regiões descritas no texto. O cone de luz (linhas diagonais), dividem a região I (tipo tempo), da região II (tipo espaço).

é obviamente um *4-vetor*: podemos somar velocidades e multiplicar por escalares. O sufixo "4" vem para diferenciar esta velocidade no espaço-tempo da velocidade no espaço usual. Vamos também representar um "4-vetor" no restante deste curso pelo símbolo u^a, mas a razão por trás desta escolha só deve ficar mais clara depois de começarmos o estudo de geometria diferencial.

O conceito de distância (32) induz a seguinte norma quadrada para a 4-velocidade u^a:

$$||u^a||^2 = -u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2, \tag{36}$$

que, como vimos na seção anterior, é um número com caráter invariante, que não depende do sistema de referência que usamos para medí-lo. A interpretação física deste número é simples. No referencial que a partícula que se move segundo (33) está em repouso, sua 4-velocidade é simplesmente dada por (34). Há ainda a escolha de parametrização, que a partícula tem liberdade de fazer. Obviamente a parametrização não pode influir na física, mas podemos fazer esta escolha com base na simplificação da álgebra. Uma parametrização natural é fazer com que o parâmetro s tenha o significado do tempo próprio medido pela partícula $s = \tau$. Se fizermos isso, a trajetória da partícula no referencial original, (33), continuará parametrizada pelo tempo próprio da partícula. Assim, (32) nos dirá que o deslocamento da partícula depois de um tempo próprio τ será

$$d(\tau)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \tau^2(-u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2).$$

Mas como vimos acima, $d(\tau)^2$ tem neste caso a interpretação de $-\tau^2$, onde τ é o mesmo tempo próprio medido pela partícula, ou seja,

$$-u_t^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = ||u^a||^2 = -1. \tag{37}$$

então em geral a norma da quadrivelocidade tem a interpretação da taxa de variação do parâmetro s da curva com relação ao tempo próprio. A parametrização que escolhemos neste exemplo é apropriadamente chamada de *parametrização de tempo próprio*.

A norma do vetor (36) advém de um produto interno, que pode ser esquematicamente descrito como:

$$\langle u^a, v^a \rangle = -u_t v_t + u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = -u_t v_t + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \tag{38}$$

Como sabemos, um produto interno define uma matriz associada η_{ab}. Neste caso em que temos uma base de vetores nas direções t, x, y, z, as componentes desta matriz são diagonais:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

E o produto entre dois vetores u^a e v^a é esquematicamente representado por $\eta_{ab} u^a v^b$. Esta notação compacta para a soma envolvida no cálculo de (38) é chamada de *notação de Einstein* e é muito usado por sua economia de símbolos de somatórios. Note que podemos ver a matriz η_{ab} como uma operação que nos requer dois vetores para nos devolver um número escalar (seu produto interno), e tal símbolo em geral é chamado de *tensor covariante de segunda ordem.*

Note também que fazemos a distinção entre o tensor η_{ab} e suas componentes na base que escolhemos (39). Em geral precisamos usar uma base específica para calcularmos valores, mas na Relatividade Geral precisamos manter tais conceitos separados. Felizmente para nós a maioria das grandezas de relevância física na relatividade restrita são escalares e assim invariantes por transformações de Poincaré, o que por sua vez implica que tais grandezas têm o mesmo valor em qualquer referencial que escolhamos.

Em termos da velocidade usual, ou 3-velocidade, $\mathbf{v}$, as componentes da 4-velocidade u^a são $(\gamma, \gamma\mathbf{v})$, onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \tag{40}$$

é uma quantidade bastante comum em relatividade restrita.

A grande vantagem da formulação de produto interno é que agora podemos introduzir as transformadas de Poincaré como aquelas que o mantém invariante:

$$\eta'_{ab} v'^a u'^b = \eta_{ab} v^a u^b \tag{41}$$

Como vimos acima no exemplo da posição, podemos escrever a transformação de Poincaré, excetuando-se translações[1], como $u'^a = \Lambda^a_b u^b$ para alguma matriz Λ^a_b. A condição acima será válida quando

$$\eta_{ab} = \Lambda^c_a \eta_{cd} \Lambda^d_b, \tag{42}$$

o que na verdade é uma definição compacta de tais transformações. Note a analogia com a definição de transformações ortogonais como aquelas que mantém o produto interno euclidiano invariante.

Outro vetor de nosso interesse é o *4-momento* de uma partícula:

$$p^a = m v^a. \tag{43}$$

Em termos de componentes, então, o 4-vetor p^a é escrito como $(m\gamma, \gamma\mathbf{v})$. A componente "temporal" é então:

$$m\gamma = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} \approx m + \frac{mv^2}{2} + \dots \tag{44}$$

[1]Estas transformações restritas são chamadas *transformações de Lorentz.*

Que é a *energia* da partícula. A quantidade m agora tem a interpretação de *energia de repouso*, e a diferença entre as duas é a *energia cinética*, cuja expansão para velocidades pequenas nos dá a expressão familiar da mecânica newtoniana. No espírito do parágrafo anterior, todos estes conceitos podem ser colocados de forma que não deixe ambiguidades com relação à nossa escolha de bases do espaço-tempo. Por exemplo, a energia de uma partícula com 4-momento p^a, vista por um referencial com 4-velocidade (normalizada) v^a, é dada por:

$$E = -\eta_{ab} p^a v^b \tag{45}$$

que se reduz à expressão anterior quando tomamos a 4-velocidade de um referencial "em repouso", cujas componentes são $(1, 0, 0, 0)$.

Como fizemos acima para a velocidade e momento, todas as propriedades da mecânica newtoniana têm sua contraparte relativística. Por exemplo, pode-se mostrar que o 4-momento é conservado em colisões elásticas, e pode-se criar um conceito de 4-força a partir da derivada temporal do 4-momento. Porém, como isso é visto com detalhe em alguns cursos, nós vamos omitir estes tópicos nesta introdução.

Por último, vamos falar sobre *fluidos perfeitos*. Dada uma densidade de massa ϱ e um campo de velocidades , $\mathbf{v}$, podemos construir a dinâmica do nosso fluido perfeito (isto é, incompressível e ideal) a partir da *equação da continuidade*:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}) = 0. \tag{46}$$

Para obter uma versão relativística desta equação, basta notarmos que se introduzirmos uma "densidade de 4-momento", $J^a = \varrho v^a$, onde ρ é a densidade de energia, e v^a é um campo vetorial representando a 4-velocidade das partículas que compe o fluido, a equação da continuidade pode ser reescrita de forma que

$$\partial_a J^a = \frac{\partial(\gamma\varrho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma \varrho \mathbf{v}) = 0 \tag{47}$$

e assim se recupera a versão não relativística quando $v \ll 1$. Introduzimos assim o operador diferencial ∇_a, cujas componentes na base (t, x, y, z) é dado por $(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$. A componente temporal de J_a tem a interpretação de *densidade de energia*, e as componentes espaciais têm a interpretação de "transferência de energia", ou *pressão*. Note que, há, contudo, uma ambiguidade nesta interpretação, pois acima não especificamos qual referencial mede a densidade de massa-energia. Assim, por analogia com a definição de energia (45), devemos ter na verdade

$$J^a = -T^a{}_b v^b \tag{48}$$

onde v^b é a 4-velocidade do referencial. O símbolo $T^a{}_b$ é chamado de *tensor de energia-momento* do fluido e é realmente intrínseco. Ele é dado em termos na densidade de energia ρ, da pressão P e do campo de 4-velocidades do fluido u^a por:

$$T^a{}_b = \rho u^a \eta_{bc} u^c + P(\delta^a_b + u^a \eta_{bc} u^c) \tag{49}$$

ou, definindo $u_b = \eta_{bc} u^b$ e $T_{ab} = \eta_{ac} T^a{}_b$:

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b). \tag{50}$$

Para explicitar o significado da expressão acima, vamos tratar o fluido como um contínuo de partículas, como se espera que seja o caso "real". A definição de T_{ab}, ou melhor, de $T^{\mu\nu} =$

$(dx^\mu)_a T^{ab}(dx^\nu)_b$ segue o raciocínio intuitivo do *fluxo de partículas que entra por um elemento de 4-volume pelo lado* $(dx^\mu)_a$ *e sai pelo lado* $(dx^\nu)_b$. Uma expressão para esta quantidade pode ser escrita como:

$$T_{ab} = \sum_a \frac{p_a^{(a)} p_b^{(a)}}{p_0^{(a)}} \delta^{(3)}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(a)}(t)) \tag{51}$$

onde o índice (a) se refere às partículas. A "função" δ acima (a delta de Dirac) pode ser pensada simplesmente como a densidade de um conjunto de partículas: ela é 0 em todos os pontos, exceto naqueles em que há uma partícula. A inclusão do termo no denominador advém do fato de requerermos covariância de Lorentz para a expressão (51), pela definição que demos à função *delta*, sua integral por todo o espaço deve resultar o número de partículas:

$$\int dV \sum_a \delta^{(3)}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^{(a)}(t)) = N. \tag{52}$$

Que é claramente um número invariante por transformações de Lorentz. Porém, como vimos, o elemento de volume não é: quando mudamos o referencial, os comprimentos se contraem por um fator de γ^{-1}. Para que a equação acima seja invariante, requeriremos da função δ que se transforme como uma *densidade*: $\delta' \to \gamma\delta$. Como a energia p_0 se tranforma do mesmo modo, a razão entre os dois é invariante e assim (51) se transforma como um tensor.

Vamos agora mostrar que (51) implica em (50). Sem perda de generalidade, vamos considerar o problema no qual todas as partículas têm a mesma massa. Os momentos são então da forma:

$$p_\mu^{(a)} = m(\gamma^{(a)}, \gamma^{(a)}\mathbf{v}^{(a)}) \tag{53}$$

com $\gamma^{(a)} = (1 - (v^{(a)})^2)^{-\frac{1}{2}}$. Agora selecione um volume pequeno do espaço, R e tire a média do tensor energia-momento sobre ele. Como a distribuição de partículas é densa e isotrópica, so pode ver claramente que a média das componentes cruzadas de (51), como $t - x$ ou $x - y$, serão nulas. Pelo mesmo argumento, os termos diagonais tipo espaço-espaço devem ser os mesmos, $T_{xx} = T_{yy} = T_{zz}$, de novo por causa da isotropia. Calculando T_{tt}, teremos:

$$T_{tt} = \frac{1}{V(R)} \int_R d\mathbf{x} \gamma m \sum_a \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(a)}) = \frac{< N\gamma m >}{V(R)} = \rho. \tag{54}$$

Como γm é a energia de uma partícula e $N/V(R)$ é a densidade do número de partículas, está-se certo em associar ρ com a densidade de energia do sistema. O cálculo das componentes espaço-espaço de T_{ab} é similar:

$$T_{xx} = \frac{1}{V(R)} \sum_a \int_R d\mathbf{x}\, \gamma^{(a)} m (v_x^{(a)})^2 \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(a)}) = \frac{1}{3} < n\gamma m v^2 > \tag{55}$$

Onde de novo n é a densidade do número de partículas. Agora, para associarmos este número com a pressão devemos nos lembrar de alguns fatos da teoria cinética clássica. Considere um número de partículas relativísticas em uma caixa. Para calcularmos a pressão nas paredes da caixa, temos que nos lembrar que i) o número de colisões em um intervalo Δt e ii) a mudança no momento de cada uma destas colisões. Não é difícil verificar que a pressão deve ser

$$P = \frac{1}{A} \left(\frac{n}{6} A v \Delta t \right) \frac{2\gamma m v}{\Delta t} = \frac{1}{3} n\gamma m v^2 \tag{56}$$

onde o fator de $\frac{1}{6}$ resultam da fração de partículas com direção certa de momento. Esta expressão é igual à expressão não relativística, exceto pelo fato dos momentos das partículas estarem "corrigidos" com o fator γ. Se tomarmos a média das diferentes velocidades, teremos o resultado para $T_{ii} = P$, e o tensor pode então ser escrito na forma covariante como (50):

$$T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b + P\eta_{ab} \tag{57}$$

onde u^μ é a 4-velocidade do centro de massa do sistema de partículas.

Referências

[1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc (1972).

[2] Jean-Philippe Uzan, *The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 403, [arXiv:hep-ph/0205340].

[3] L. Landau e E. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 2: Teoria do Campo*, Editora Mir, (1980);

[4] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).

[5] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, [arXiv:gr-qc/9712019], ou *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).

[6] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).