Introdução à Relatividade Geral

6ª Lista de Exercícios - Entrega dia 29/09/2006

Problema 1: Seja K^a um vetor de Killing tipo-tempo em uma métrica assintoticamente plana. Uma geodésica que percorre as curvas integrais deste vetor (isto é com as outras coordenadas fixas), terá uma aceleração.

(a) Mostre que a aceleração é dada por:

$$A_a = -\nabla_a \log V$$

onde $V = \sqrt{-K_a K^a}$.

(b) Use o resultado acima e a conservação da energia para calcular a tração em uma corda que liga uma partícula de massa unitária que segue a trajetória de K^a com o observador no infinito.

(c) Mostre que na métrica de Schwarzschild a tração na corda sentida pelo observador do infinito será

$$\kappa = \frac{1}{4M}$$

quando a partícula estiver sobre o horizonte de eventos.

Problema 2: (Wald 6.6) Mostre que qualquer partícula (Não necessariamente em movimento geodésico) na região $r < 2M$ no espaço extendido de Schwarzschild, forçosamente terá sua coordenada radial decrescente com o tempo próprio por uma taxa dada por

$$\left|\frac{dr}{d\tau}\right| \geq \sqrt{\frac{2M}{r} - 1}.$$

Mostre, assim, que o tempo máximo de vida para qualquer observador nesta região é $\tau = \pi M$ ($\approx 10^{-5} M/M_\odot$

Problema 3: Suponha que uma estrela é constituida de um fluido com equação de estado $P = w\rho$ que satisfaça a condição de energia forte. Use a equação de Raychaudhuri para mostrar que se a estrela contiver uma *superfície aprisionada*, isto é, se $\theta_0 < 0$ em uma superfície fechada, então uma singularidade métrica se formará em um tempo próprio dado por

$$\tau \leq \frac{3}{|\theta_0|}$$