Introdução à Relatividade Geral

5ª Lista de Exercícios - Entrega dia 22/09/2006

Problema 1: (Wald 5.3)

(a) Considere a equação modificada de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}.$$

Escreva análogos das equações de Friedmann,

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi\rho - 3\frac{k}{a^2}, \qquad 3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3P)$$

com os termos dependentes de Λ. Mostre que soluções estáticas destas equações são possíveis apenas com $\Lambda > 0$. Estas soluções são chamadas *universos estáticos de Einstein*. Para um universo preenchido com poeira $P = 0$, relacione o "raio do universo" $a(t)$ com a densidade ρ. Examine perturbações da solução achada para $a(t)$ e mostre que o universo de Einstein é instável.

(b) Considere a equação modificada de Einstein com $\Lambda > 0$ e $T_{ab} = 0$. Obtenha a solução homogênea espacialmente e isotrópica para o caso $k = 0$. O resultado é na verdade homogêneo espaço-temporalmente e conhecido como o *espaço-tempo de de Sitter*.

Problema 2: Considere a métrica de FRW com seção espacial plana:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

onde $a(t) \propto t^\alpha$. Como vimos, a estrutura causal deste espaço-tempo no futuro varia conforme $\alpha > 0$ ou não.

(a) A partir das equações de Friedmann, relacione α com a constante w na equação de estado $P = w\rho$ para o futuro longínquo $t \gg 1$.

(b) Mostre que as trajetórias das geodésicas tipo tempo têm comprimento finito para $w < -1$. Isto significa que neste caso de pressão fortemente negativa o espaço tempo tem uma expansão tão acelerada que virtualmente "se rompe". Este fenômeno foi chamado de "big rip", e pode se tornar uma realidade para a evolução do nosso universo.

Problema 3: Considere a *métrica de Kasner*:

$$ds^2 = -dt^2 + X^2(t)dx^2 + Y^2(t)dy^2 + Z^2(t)dz^2.$$

na presença de poeira $P = 0$. Defina a função $S(t)^3 = X(t)Y(t)Z(t)$ como o elemento de volume espacial.

(a) Mostre que a equação da continuidade para o tensor energia-momento implica que

$$\frac{4}{3}\pi\rho = \frac{k}{S^3}, \tag{1}$$

com k uma constante.

(b) Mostre que

$$X(t) = S(t)\left(\frac{t^{\frac{2}{3}}}{S(t)}\right)^{2\sin\alpha}, \quad Y(t) = S(t)\left(\frac{t^{\frac{2}{3}}}{S(t)}\right)^{2\sin(\alpha+\frac{2}{3}\pi)}, \quad Z(t) = S(t)\left(\frac{t^{\frac{2}{3}}}{S(t)}\right)^{2\sin(\alpha+\frac{4}{3}\pi)}, \tag{2}$$

com

$$S(t) = \frac{9}{2}kt(t+\Sigma), \tag{3}$$

é uma solução das equações de Einstein para α e Σ constantes. Note que a evolução é anisotrópica para $\Sigma \neq 0$.

(c) Mostre que o universo de Kasner acima evolui mais rápido que o análogo FRW dominado por poeira. [Dica: considere os fatores de expansão nas três direções.]