Introdução à Relatividade Geral

4ª Lista de Exercícios - Gabarito

Problema 1: (Wald 4.3)

(a) Derive a "Lei de Lorentz" da geometroeletrodinâmica

$$\mathbf{a} = -\mathbf{E} - 4\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{1}$$

Resposta: As equações de Einstein linearizadas são escritas como

$$\partial_c \partial^c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab}, \tag{2}$$

no limite não-relativístico quando o tensor de energia-momento é escrito como $T_{ab} = 2t_{(a}J_{b)} - \rho t_a t_b$.

Neste limite temos um vetor tipo-tempo $t^a = (\partial_t)^a$, seguido pelo referencial inercial absoluto, e $J^a = \rho u^a$ é a corrente de matéria. Tomando as componentes tempo-espaciais da equação de Einstein,

$$\nabla^a \bar{\gamma}_{t\mu} = 16\pi J_\mu \tag{3}$$

e definindo o "potencial vetor" $A_\mu = -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{t\mu}$, reescrevemos como

$$\nabla^2 A_\mu = -4\pi J_\mu \tag{4}$$

que é equivalente às equações de Lorentz no calibre de Lorentz. As equações espaciais-espaciais não possuem fontes, já que $T_{ij} = 0$, e assim podemos tomar $\bar{\gamma}_{ij} = 0$.

Para calcular a Lei de Lorentz, precisamos calcular a equação da geodésica na métrica perturbada. Usando

$$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\bar{\gamma} \tag{5}$$

onde

$$\bar{\gamma} = \eta^{ab}\bar{\gamma}_{ab} = \eta^{tt}\bar{\gamma}_{tt} = 4A_t \tag{6}$$

e teremos

$$\begin{aligned} \gamma_{tt} &= -2A_t \\ \gamma_{ti} &= -4A_i \\ \gamma_{ij} &= -2A_t\delta_{ij} \end{aligned} \tag{7}$$

Agora podemos calcular os símbolos de Christoffel. Na aproximação linear,

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{\eta^{\rho\sigma}}{2}(\partial_\mu \gamma_{\sigma\nu} + \partial_\nu \gamma_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu}) \tag{8}$$

e os termos relevantes serão:

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{tt} &= \frac{\eta^{ij}}{2}(-\partial_j(-2A_t)) = -\delta^{ij}\frac{\partial \phi}{\partial x^j} = E^i \\ \Gamma^i_{jt} &= \frac{1}{2}(\partial_j(-4A_i) - \partial_i(-4A_j)) = 2\left(\frac{\partial A_j}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\right) = 2\epsilon_{ijk}B^k \end{aligned} \tag{9}$$

onde desprezamos termos envolvendo derivadas temporais. A equação da geodésica será dada, na aproximação linearizada, por:

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^{i}_{jt}\frac{\partial x^j}{\partial \tau}\frac{dt}{d\tau} = 0 \tag{10}$$

e tomemos $dt/d\tau \approx 1$. Com os símbolos de Christoffel acima, a lei de Lorentz segue.

(b) Mostre que os "campos elétrico e magnético gravitacionais" **E** e **B** dentro de uma casca esférica com massa M e raio R (com $M \ll R$), que se move com uma pequena velocidade angular ω são dados por

$$\mathbf{E} = 0, \qquad \mathbf{B} = \frac{2M}{3R}\boldsymbol{\omega}. \tag{11}$$

Resposta: A distribuição de matéria nos dá $J_\mu = (-\rho, \rho\mathbf{v})$, onde

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{M}{4\pi R^2}\delta(r-R) \\ \mathbf{J} = \rho\mathbf{v} &= \rho R\omega \operatorname{sen}\theta\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{M\omega}{4\pi R}\operatorname{sen}\theta\ \delta(r-R)\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \end{aligned} \tag{12}$$

que nos leva a um problema de magnetostática. Como temos a lei de Gauss, no interior da casca esférica teremos $\mathbf{E} = 0$. Quanto ao campo gravitomagnético, podemos resolvê-lo usando a solução geral para a equação de Laplace:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} a_{lm} r^l Y_l^m(\theta, \phi) \tag{13}$$

para constantes a_{lm}. Para resolver a equação, temos que substituir $\mathbf{A} = \phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$ na equação e achar as constantes a_{lm}. Como a dependência da corrente é apenas com seno de θ, só teremos $l = 1$ na equação acima. A solução nos dá

$$\mathbf{A} = \frac{M\omega}{3R} r \operatorname{sen}\theta\ \hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{14}$$

e assim

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2M\omega}{3R}\hat{\mathbf{z}} = \frac{2M}{3R}\boldsymbol{\omega} \tag{15}$$

(c) Um observador em repouso no centro da casca da parte anterior faz o transporte paralelo ao longo de sua própria trajetória (geodésica) de um vetor S^a com $S^a u_a = 0$, onde u^a é o vetor tangente à sua linha-mundo. Mostre que as componentes inerciais **S**, precessam de acordo com $d\mathbf{S}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{S}$, onde $\boldsymbol{\Omega} = 2\mathbf{B} = \frac{4}{3}M/R\boldsymbol{\omega}$. [...] No interior da casca, o padrão de "não-rotacionário", definido pelo transporte paralelo por uma geodésica, difere do que seria sem a existência da casca esférica, de acordo com o princípio de Mach.

Resposta: A equação que determina o transporte paralelo de S^a é

$$u^b\nabla_b S^a = u^b\partial_b S^a + u^a\Gamma^b_{ac}S^c = 0 \tag{16}$$

Esta equação determina como as componentes de S^a se modificarão no referencial que segue a trajetória com 4-velocidade u^a. No centro da casca esférica, $u^a = (\partial_t)^a$ e a equação acima tem a mesma forma da lei de Lorentz, a menos do fator de 2 na equação (10). Assim, nestas componentes, e de (9), temos

$$u^b \partial_b S^i = \frac{dS^\mu}{dt} = -\Gamma^\mu_{ti} S^i = -2\epsilon_{ijk} B^k S^j \tag{17}$$

ou seja,

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{S} \tag{18}$$

com $\mathbf{\Omega} = 2\mathbf{B}$.

Problema 2: (Wald 4.9) Uma sistema binário consiste de duas estrelas de mesma massa M e separação R muito maior que seu raio, em uma órbita newtoniana quase circular. Assumindo a validade da equação (4.4.58) para este sistema, calcule a taxa de aumento da frequência orbital devido à emissão de radiação gravitacional.

Resposta: Para este sistema binário, as posições das partículas podem ser dadas por:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{R}{2}\cos\omega t, \quad & x_2 &= -\frac{R}{2}\cos\omega t \\ y_1 &= \frac{R}{2}\,\mathrm{sen}\,\omega t, \quad & y_2 &= -\frac{R}{2}\,\mathrm{sen}\,\omega t \\ z_1 &= 0, \quad & z_2 &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

E a densidade de massa será:

$$T^{tt} = \rho = M\delta(x-x_1)\delta(y-y_1)\delta(z) + M\delta(x-x_2)\delta(y-y_2)\delta(z) \tag{20}$$

E o tensor de quadrupolo será dado por

$$q^{ij} \equiv 3\int T^{tt} x^i x^j \; d^3x = 3M(x_1^i x_1^j + x_2^i x_2^j) \tag{21}$$

ou em componentes

$$\begin{gathered} q^{xx} = 6M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cos^2\omega t, \qquad q^{yy} = 6M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \mathrm{sen}^2\omega t \\ q^{xy} = 3M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \mathrm{sen}\,2\omega t, \qquad q^{zz} = q^{xz} = q^{yz} = 0 \end{gathered} \tag{22}$$

Finalmente calculando sua parte sem traço $Q^{ij} = q^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} q$ com $q = q^{xx} + q^{yy} + q^{zz}$ teremos

$$\begin{gathered} Q^{xx} = 6M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cos^2\omega t - 2M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \qquad Q^{yy} = 6M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \mathrm{sen}^2\omega t - 2M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \\ Q^{xy} = 3M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \mathrm{sen}\,2\omega t, \qquad Q^{zz} = -2M\left(\frac{R}{2}\right)^2 \end{gathered} \tag{23}$$

Usando a fórmula para a potência total irradiada em um sistema de quadrupolo,

$$P = \frac{1}{45} \sum_{ij} \left(\frac{d^3 Q^{ij}}{dt^3} \right)^2 \tag{24}$$

precisamos diferenciar Q^{ij} três vezes. A resposta é

$$\begin{gathered} \frac{d^3 Q^{xx}}{dt^3} = 24M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega^3 \operatorname{sen} 2\omega t, \; \frac{d^3 Q^{yy}}{dt^3} = -24M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega^3 \operatorname{sen} 2\omega t, \\ \frac{d^3 Q^{xy}}{dt^3} = -24M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega^3 \cos 2\omega t \end{gathered} \tag{25}$$

Ao contarmos ambos Q^{xy} e Q^{yx}, a fórmula para P nos dá

$$P = \frac{1}{45} \left[24M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega^3 \right]^2 (2 \operatorname{sen}^2 2\omega t + 2\cos^2 2\omega t) = \frac{8}{5} M^2 R^4 \omega^6 \tag{26}$$

Se quisermos relacionar esta expressão e $\dot{\omega}$, precisaremos de uma expressão entre $\dot{E} = -P$ e $\dot{\omega}$. A expressão para a energia total do sistema é

$$E = \frac{1}{2} M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega^2 - \frac{M^2}{2R} \tag{27}$$

com o último termo devido à atração newtoniana. Esta expressão pode ser simplificada relacionando a força centrípeta com a força newtoniana

$$\frac{M}{2} \omega^2 R = \frac{M^2}{R^2} \tag{28}$$

assim

$$E = -M \left(\frac{R}{2}\right)^2 \omega^2 \tag{29}$$

e

$$\dot{E} = -\frac{1}{2} R^2 \omega^2 \left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{\dot{\omega}}{\omega} \right) \tag{30}$$

Porém, de (28) tiramos uma relação entre $\dot{R}$ e $\dot{\omega}$

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} + 3 \frac{\dot{R}}{R} = 0 \tag{31}$$

Que finalmente nos dá

$$\dot{E} = -\frac{1}{6} M R^2 \omega \dot{\omega} \tag{32}$$

Usando a relação acima para P, teremos

$$\omega = \frac{48}{5} M R^2 \omega^5 \tag{33}$$

e, finalmente, usando (28) para eliminar a dependência em ω:

$$\dot{\omega} = \frac{192}{5} \sqrt{\frac{2M^7}{R^{11}}} \tag{34}$$

que é a resposta final.