Introdução à Relatividade Geral

$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios - Entrega dia 09/08/2006

Problema 1: (Wald 3.7) Como demonstrado no problema 3.2, uma métrica Lorentziana arbritrária em um espaço-tempo bi-dimensional pode ser colocada na forma $ds^2 = \Omega^2(x,t)[-dt^2 + dx^2]$.

(a) Calcule o tensor de Riemann desta métrica.

(b) não é necessário.

Problema 2: (Carroll) Temos a métrica de um universo em expansão:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2].$$

Mostre que, para $a(t) \propto t^q$ com $0 < q < 1$ constante, pode haver "horizontes", isto é, podemos achar dois eventos com separação tipo espaço de tal forma que seus cones de luz do passado não se encontram. Ache um exemplo de uma forma de $a(t)$ de tal forma que haja horizontes tanto no passado como no futuro, de tal forma que possamos achar eventos dos quais os cones de luz não se encontram nem no passado nem no futuro, e assim um evento nunca saberá da existência do outro.

Problema 3: Considere a métrica tri-dimensional:

$$ds^2 = -\left(-M + \frac{r^2}{\ell^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{-M + \frac{r^2}{\ell^2}} + r^2 d\phi^2 \tag{1}$$

onde ϕ é de fato uma variável angular $\phi \in [0, 2\pi]$ e M e ℓ são constantes. Calcule o tensor de Riemann associado a esta métrica. Qual é a curvatura escalar? Mostre que este espaço é maximalmente simétrico para qualquer valor de M. [Dica: faça o problema com f(r) genérico.]

Problema 4: Ache o "potencial efetivo" relacionado à métrica (1). Esboce as geodésicas do tipo tempo e do tipo nulo no plano $t - r$. Mostre que a curva

$$r_0 = \sqrt{M}\ell, \qquad \phi = \phi_0 \tag{2}$$

com r_0 e ϕ_0 constantes é uma geodésica.