Introdução à Relatividade Geral

2ª Lista de Exercícios - Entrega dia 25/07/2006

Problema 1: (Wald 2.1) Defina dois mapas da esfera $f^{\pm}$ da S^2 nos números reais $\mathbb{R}^2$ dados pelas projeções estereográficas em relação aos pólos Norte e Sul, respectivamente.

(a) Mostre que as funções de transição $f^{\pm} \circ (f^{\pm})^{-1}$ são infinitamente diferenciáveis, e assim que S^2 é uma variedade diferenciável.

(b) Item (b) não é necessário.

Problema 2: (Wald 2.3)

(a) Verifique que o comutador de vetores satisfaz as condições de linearidade e a regra de Leibnitz, e assim age em funções como uma derivada direcional, definindo um vetor.

(b) Sejam X^a, Y^a e Z^a campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade $\mathscr{M}$. Verifique que seus comutadores satisfazem a *identidade de Jacobi*:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \tag{1}$$

(c) Sejam $Y_1^a, \ldots, Y_n^a$ campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade n-dimensional $\mathscr{M}$ tal que a cada ponto p eles formam uma base do espaço tangente $T_p\mathscr{M}$. Então, a cada ponto, pode-se expandir cada comutador $[Y_i, Y_j]$ nesta base, e assim definir funções ${C^k}_{ij} = -{C^k}_{ji}$ tal que

$$[Y_i, Y_j] = \sum_k {C^k}_{ij} Y_k. \tag{2}$$

Use a identidade de Jacobi para derivar uma equação satisfeita pelos ${C^k}_{ij}$.

Problema 3: (Wald 2.7) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e seja g uma métrica em V.

(a) Mostre que sempre podemos achar uma base ortonormal $v_1, \ldots, v_n$ de V, isto é, uma base tal que $g(v_i, v_j) = \pm\delta_{ij}$. (Dica: Use indução. Para métricas positivas definidas, existe um método simples (Gram-Schmidt) para construir uma base ortonormal a partir de uma base arbitrária. Neste caso de uma métrica lorentziana – não positiva definida –, a construção não é generalizada diretamente pois existem "vetores nulos" na construção, ou seja, vetores não identicamente nulos v que satisfazem $g(v, v) = 0$. Note que um vetor nulo é ortogonal a si próprio!)

(b) Mostre que a signatura de g é independente da escolha de base ortonormal.

Problema 4: (Wald 2.8)

(a) A métrica do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ é $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Mostre que as componentes do tensor métrico em coordenadas esféricas r, θ, ϕ, definidas por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \cos\theta = \frac{z}{r}, \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x} \tag{3}$$

é dada por $ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta\, d\phi^2$

(b) A métrica espaço-temporal da relatividade especial é $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Ache as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e sua inversa $g^{\mu\nu}$ nas "coordenadas girantes", definidas por

$$\begin{aligned} t' = t, \quad x' = \sqrt{x^2 + y^2}\cos(\phi - \omega t) \\ y' = \sqrt{x^2 + y^2}\operatorname{sen}(\phi - \omega t), \quad z' = z \end{aligned} \tag{4}$$