Solução da segunda lista de relatividade geral

Universidade Federal de Pernambuco

Julho 2006

Professor: Bruno Carneiro Cunha
Monitor: Cesar Leonardo

- Problema 1.

Esta questão tem duas partes, ambas nos pedem para demonstrar a compatibilidade C^∞ entre cartas em S^2. Lembre-se que uma carta em uma variedade M é uma aplicação um-a-um Ψ, de um subconjunto aberto O de M a um subconjunto U de $\mathbb{R}^n$.

Se nós tivermos duas tais cartas que se interceptam na variedade $O \cap O' \neq \emptyset$, então nós exigimos que elas sejam compatíveis , no sentido que a aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ induzida pela intersecção , seja infinitamente diferenciável no sentido normal que se vê no cálculo avançado ordinário. Note que nao temos uma maneira de definir o que isto significa para uma única aplicação Ψ: $O \rightarrow U$ ser infinitamente diferenciável, desde que nao temos noções , a priori, de suavidade em M.

a) Na secçao 2.1 do livro texto , Wald mostra como S^2 pode ser coberto com seis cartas , projetando-se hemisférios abertos em planos abaixo, passando pelo centro da esfera. Isto é, nós temos dois subconjuntos abertos $O^{\pm} = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid \pm x_i > 0\}$, cada um com sua correspondente aplicação $f^{\pm}{}_i$, em $\mathbb{R}^2$, definida "planeando-se" a i-ésima coordenada, de forma que $f_1^+(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3)$, etc.

Nossa tarefa aqui é mostrar que essas cartas são compatíveisno sentido acima exposto. O único tipo de intersecção que nós sempre obtemos entre essas aplicações é um quarto da esfera e , pela simetria óbvia do problema , nós precisamos somente considerar uma tal interscção.

Consideremos O_1^+e O_2^+, que se interceptam no quadrante x ,y >0 da esfera:

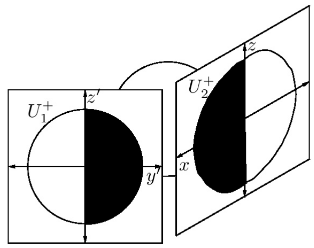

Figura 1

Nossa tarefa é mostrar que a aplicação $f_1^+ \circ (f_2^+)^{-1}$ é C^∞. Denotemos as coordenadas em U_2^+ por (x,z) de forma que a região de intersecção aplica-se em $\{(x,z) \in U_2^+ | x>0 \text{ , } x^2+z^2<1 \}$ e as coordenadas em U_1^+ como (y' ,z') de forma que a região de intersecção aplica-se em $\{(y',x') \in U_1^+ | y'>0 \text{ , } y'^2+z'^2<1 \}$. Agora, nos podemos especificar a aplicação $f_1^+ \circ (f_1^+)^{-1}$ escrevendo (y',z') como uma função de (x,y).

A parte z é fácil; nós temos z'=z , que é obviamente C^∞. Nós obtemos y' como uma função de (x,z) estabelecendo a condição de que os pontos em M estejam na esfera

$x^2+y'^2+z^2=1$

que nos dá:

$$y' = +\sqrt{1-x^2-z^2}$$

que é C^∞ já que , a expressão dentro da raiz quadrada é sempre não nula e positiva pois, na região de interseção, x>0 e $x^2+z^2<1$. Similarmente, para a aplicação inversa $f_2^+ \circ (f_1^+)^{-1}$ temos

$$z = z'$$

$$x = \sqrt{1-y'^2-z'^2}$$

que é C^∞ para a região de intersecção.

Agora , nós temos que mostrar que é possível cobrir S^2 com duas cartas. Considere a projeção estereográfica que aplica um ponto em S^2 a um ponto no plano , traçando-se uma reta desde de o polo norte, pelo ponto em questão, até a um plano tangente ao polo sul. Esta aplicação leva S^2, menos o polo norte, em todo o plano $\mathbb{R}^2$. Nosso propósito é cobrir S^2 com duas tais projeções, uma do polo norte e a outra do polo sul, denotadas respectivamente por ψ e ψ'. Ambas são claramente um-a-um e sobre e aplicam em subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^2$ digamos, todo $\mathbb{R}^2$. Nossa tarefa é mostrar que elas são C^∞ na região de intersecção, ou seja, S^2 com ambos os polos removidos. Cada uma das duas aplicações ψ e ψ' aplica esta região de intersecção em $\mathbb{R}^2$-{0}; assim precisamos considerar a aplicação $\psi'\circ\psi^{-1}$: $\mathbb{R}^2$-{0}$\mapsto$ $\mathbb{R}^2$-{0}. Primeiro ,devemos encontrar a forma explícita de ψ e ψ' . A figura abaixo mostra um ponto a com coordenadas (x,y,z) em S^2 menos o polo norte que é mapeado a A$\in\mathbb{R}^2$ com coordenadas (X , Y).

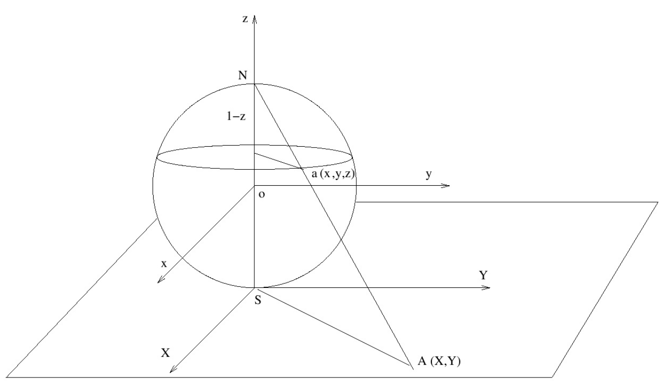

Figura 2

Por semelhança de triângulos, temos :

$$\frac{1-z}{2}=\frac{x^2+y^2}{X^2+Y^2} \text{ , isto é,}$$

$$X^2+Y^2=\frac{2}{1-z}(x^2+y^2)$$

Projetando-se a reta SA da figura nos eixos X e Y , respectivamente, nós obtemos:

$$X=\frac{2x}{1-z} \ (1)$$

$$Y=\frac{2y}{1-z} \ (2)$$

onde -1$\leq$z $<$ 1. Isto é uma expressão explícita para ψ. Similarmente, ψ' pode ser expresso como

$$X'=\frac{2x}{1+z} \ (3)$$

$$Y'=\frac{2y}{1+z} \ (4)$$

onde -1$<$ z $\leq$1. A aplicação $\psi' \circ \psi^{-1}$, verdadeiramente expressa X' e Y' como funções de X e Y . Da eq. (1) e (2) e do fato de que todos os pontos em S^2 satisfazem $x^2+y^2+z^2=1$, temos

$$X^2+Y^2=4\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \ (5)$$

Assim, da eq. (3)

$$X'=\frac{2x}{1-z}\frac{1-z}{1+z}=\frac{4X}{X^2+Y^2}$$

similarmente,

$$Y'=\frac{4Y}{X^2+Y^2} \ (7)$$

Vemos então que X' e Y' expressos por (6) e (7) são C^∞ desde que a origem X=0 , Y=0 é excluída da região de intersecção.

- Problema 2 (Wald 2.3)

Esta questão envolve a verificação de algumas propriedades do comutador de dois campos vetoriais.

a) Aqui, nós devemos mostrar que o comutador de dois [v,w] é , em si, um campo vetorial, verificando que ele satisfaz a linearidade e as propriedades de Leibnitz. Esta demonstração é direta , pois [v,w] tem as propriedades inerentes a v e w , como segue-se:

sejam a , b $\in\mathbb{R}$ e f , g$\in\mathcal{F}$.

Linearidade:

[v,w](af+bg) = v(w(af+bg)) - w(v(af+bg))

=v(aw(f) + bw(g)) - w(av(f) + bv(g))

=v(fw(g)) + v(gw(f)) - w(fv(g) - w(gv(f))

=v(f)w(g) + fv(w(g)) + v(g)w(f) + gv(w(f)) - w(f)v(g) - fw(v(g)) - w(g)v(f) - gw(v(f))

=f[v(w(g)) - w(v(g))] + g[v(w(f)) - w(v(f))]

=f[v,w](g) + g[v,w](f)

b) Agora, devemos mostrar que o comutador satisfaz a identidade de Jacobi:

[[X,Y] , Z] + [[Y,Z] , X] + [[Z,X] , Y] = 0

A maneira mais fácil de mostrar isso é simplesmente escrever os termos explicitamente. No que se segue, expressões como XY e XYZ significam que XY : $\mathcal{F}\rightarrow\mathcal{F}$ é definida pela composição das aplicações X e Y de forma que XY(f) = X(Y(f)). Note que esta composição não define um novo campo vetorial pois ela não satisfaz a regra de Leibnitz (os termos cruzados do tipo v(f)w(g) acima não se cancelam). No entanto, esses objetos podem ser adicionados e subtraídos como aplicações de $\mathcal{F}$ *em* $\mathcal{F}$ de uma mnaneira natural.

[[X,Y] , Z] + [[Y,Z] , X] + [[Z,X] , Y] = [[XY - YX , Z] + [YZ - ZY , X] + [ZX - XZ , Y] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YZX - ZYX - XYZ + XZY + ZXY - XZY - YZX + YXZ = 0.

c) Consideremos:

$[[X_\rho, X_\sigma] , X_\tau] + [[X_\sigma, X_\tau] , X_\rho] + [[X_\tau, X_\rho] , X_\sigma] = 0$ com

$[X_\rho, X_\sigma] = C^\mu_{\rho\sigma}X_\mu$

$[X_\sigma, X_\tau] = C^\nu_{\sigma\tau}X_\nu$

$[X_\tau, X_\rho] = C^\kappa_{\tau\rho}X_\kappa$

de forma que

$[C^\mu_{\rho\sigma}X_\mu, X_\tau] + [C^\nu_{\sigma\tau}X_\nu, X_\rho] + [C^\kappa_{\tau\rho}X_\kappa, X_\sigma] = 0$

$C^\mu_{\rho\sigma}[X_\mu, X_\tau] + C^\nu_{\sigma\tau}[X_\nu, X_\rho] + C^\kappa_{\tau\rho}[X_\kappa, X_\sigma] = 0$

$C^\mu_{\rho\sigma}(C^\alpha_{\mu\tau}X_\alpha) + C^\nu_{\sigma\tau}(C^\beta_{\nu\rho}X_\beta) + C^\kappa_{\tau\rho}(C^\gamma_{\kappa\sigma}X_\gamma) = 0$

$C^\mu_{\rho\sigma}C^\alpha_{\mu\tau}X_\alpha + C^\nu_{\sigma\tau}C^\beta_{\nu\rho}X_\beta + C^\kappa_{\tau\rho}C^\gamma_{\kappa\sigma}X_\gamma = 0$

Fazendo $\alpha= \beta= \gamma\equiv\xi$ teremos:

$C^\mu_{\rho\sigma}C^\xi_{\mu\tau}X_\xi + C^\nu_{\sigma\tau}C^\xi_{\nu\rho}X_\xi + C^\kappa_{\tau\rho}C^\xi_{\kappa\sigma}X_\xi = 0 \Rightarrow$

$(C^\mu_{\rho\sigma}C^\xi_{\mu\tau} + C^\nu_{\sigma\tau}C^\xi_{\nu\rho}+ C^\kappa_{\tau\rho}C^\xi_{\kappa\sigma})X_\xi= 0 \Rightarrow (C^\mu_{\rho\sigma}C^\xi_{\mu\tau} + C^\nu_{\sigma\tau}C^\xi_{\nu\rho}+ C^\kappa_{\tau\rho}C^\xi_{\kappa\sigma}) = 0$

- Problema 3:

(a) Nós provamos o teorema construindo explicitamente a base ortonormal. O processo é essencialmente o de ortogonalizaçõa de Gram-Schimdt, porém com o cuidado ao tratarmos os vetores nulos, uma vez que estamos diante de uma métrica não positiva-definida.

Seja então V um espaço vetorial de dimensão finita n munido com um produto interno Loretziano e utilizemos indução em n, dimensão de V. Primeiro considere n=1, e tomemos qualquer vetor v_1 tal que g (v_1, v_1) $\neq$0.

Como é que nós sabemos que tal vetor sempre existe para uma métrica arbitrária? Assuma por contradição, que nenhum tal vetor exista de forma que nós temos g (v , v) =0 para todo vetor em V. Então, para cada v, w $\in$V , teremos:

$g(v, w) = \frac{1}{4}[\, g(v+w, v+w) - g(v-w, v-w)\,] = 0$

E assim, g é degenerado, o que nos dá a contradição.

Tendo escolhido v_1, nós definimos

$u_1 \equiv \frac{v_1}{\sqrt{|g(v_1,v_1)|}}$

de forma que

$g(u_1, u_1) = \frac{g(v_1,v_1)}{|g(v_1,v_1)|} = \pm 1$

desde que u_1 é linearmente independente, ele é a base ortogonal que procuramos.

Agora, precisamos completar a indução assumindo que o teorema se verifica para dim (V) = n - 1 e provando que ele tanbém se verifica para dim (V) = n.

Para dim (V) = n , escolhamos um vetor não nulo e o normalizemos conforme o procedimento acima para produzirmos u_n, onde g (u_n, u_n) =$\pm$1.

Consideremos agora $V_\perp = \{ v \in V \,|\, g(v, u_n)=0 \}$. Este conjunto é claramente fechado sob adição, multiplicação por escalar e inversão de forma que constitui um subespaço de V. Agora, se pudermos mostrar que dim ($V_\perp$)= n-1 , podemos aplicar a hipótese indutiva a $V_\perp$. Desde que g é não-degenerado e $u_n \neq 0$, sabemos que g (. , u_n) é algum elemento diferente de zero de V^*, digamos u^{*n}. Então, selecionemos alguma base de V^* contendo u^{*n} como um de seus elementos, $\{ w^{*1}, w^{*2}, \ldots , w^{*n-1}, w^{*n} \}$ e seja $\{ e_1, \ldots , e_n \}$ a base dual para V. Desde que , por definição , $w^{*i}(e_j)= \delta^i_j$, o conjunto de todos os vetores v tais que , g(v , u_n)= u^{*n}(v)=0 é simplesmente o gerador de $\{ e_1, \ldots , e_{n-1} \}$, o qual é , claramente , (n-1)- dimensional. Adicionalmente, nós precisamos mostrar que a restrição de g a $V_\perp$, $g|_{V_\perp}$, é uma boa métrica.

Nós precisamos checar a não-degenerescência da métrica em $V_\perp$. Assumamos que g seja degenerado em $V_\perp$. Isto quer dizer que existe um vetor $v \in V_\perp$ tal que g(v, w)=0 para qualquer w $\in V_\perp$. De acordo com a discussão acima, sabemos que qualquer $u \in V$ pode ser expresso como

$u = \alpha u_n + w$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e w $\in V_\perp$.

Assim

$g(v , u)= g(v , \alpha u_n + w) = \alpha g(v , u_n) + g(v , w)=0$

Isto é , g é degenerado. Logo , a restrição de g a $V_\perp$ não pode ser degenerado.

Desde que $V_\perp$é um espaço vetorial de dimensão n-1 com métrica , nós aplicamos a hipótese indutiva para munir $V_\perp$com uma base ortonormal { u_1, ... , u_{n-1}}. Claramente, os vetores {u_1, ... , u_{n-1}, u_n} forma um conjunto ortonormal de vetores em V. O que resta ser então mostrado é que este constitui uma base para V.

Considere uma combinação linear desses vetores que se anula:

$w = \alpha^\mu \alpha_\mu = 0$

Assim nós temos

$0 = g (w , v_\nu) = \pm\alpha^\nu$

Para cada coeficiente α^ν. Isto é, os vetores {u_1, ... , u_{n-1}, u_n} são linearmente independentes. Desde que, todo conjum]nto de n vetores L.I., em um espaço vetorial de dimensão finita n, constitui uma base, eles são então uma base ortonormal, como procurávamos.

(b) Considere um espaço vetorial V de dimensão finita n, munido com uma métrica g e considere uma base ortonormal {u_1, ... , u_n}, ordenada de tal maneira que {u_1, ... , u_k} tenham todos comprimento +1 e { u_{K+1}, ... , u_n} tenham todos comprimento -1. Agora, considere qualquer outra base ortonormal { v_1, ... , v_n} ordenada de tal maneira que { v_1, ... , v_l} tenham todos comprimento +1 e { v_{k+1}, ... , v_n} , analogamente , comprimento -1. Nossa tarefa é mostrar que k=l. Assumamos , por contradição , que $k \neq l$.

Sem perda de generalidade , nós assumimos adicionalmente, que k>l. Agora , nós escolhemos todos os k vetores bases com comprimento +1 dos {u_i} e todos os n-1 vetores bases com comprimento -1 dos {v_i}.

Então , nós temos um conjunto { u_1, ... , u_k , v_{l+1} , ... , v_n } , o qual tem k+n-l vetores. Pela nossa hipótese , este conjunto tem mais de n elementos . Assim , deve existir pelo menos um vetor que pode ser expresso , linearmente , pelo resto dos vetores no conjunto. Sem perda de generalidade , nós supomos

$u_1 = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=l+1}^{n} b_j v_j$

Isto é

$u_1 - \sum_{i=2}^{k} \alpha_i u_i = \sum_{j=l+1}^{n} b_j v_j$

Se nós denotarmos o vetor, em cada lado da igualdade acima, por w, então do lado esquerdo, nós teremos:

$g(w, w) = 1 + \sum_{i=2}^{k} \alpha^2{}_i > 0$

enquanto que o lado direito nos dá:

$g(w, w) = \sum_{j=l+1}^{n} (-b^2{}_j) \leq 0$

de forma que obtemos uma contradição. Dessa forma, provamos que k = l.

- Problema 4: (Wald 2.8)

(a) Para esta parte usaremos a lei de transformação tensorial para obter as componentes em relação às novas coordenadas $\{ x'^{\mu} \} \equiv \{ r, \theta, \varphi \}$ a partir das coordenadas antigas $\{ x^{\mu} \} \equiv \{ x, y, z \}$.

Sejam então dados $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ e a transformação de coordenadas

$x = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi$

$y = r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi$

$z = r\cos\theta$

A lei de transformação

$g_{\mu'\nu'} = \frac{dx^{\mu}}{dx'^{\mu}} \frac{dx^{\nu}}{dx'^{\nu}} g_{\mu\nu}$

requer que calculemos as seguintes derivadas:

$\frac{dx}{dr} = \mathrm{sen}\theta\cos\varphi$; $\frac{dx}{d\theta} = r\cos\theta\cos\varphi$; $\frac{dx}{d\varphi} = -r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi$

$\frac{dy}{dr} = \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi$; $\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\varphi$; $\frac{dy}{d\varphi} = r\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi$

$\frac{dz}{dr} = \cos\theta$; $\frac{dz}{d\theta} = -r\,\mathrm{sen}\theta$; $\frac{dz}{d\varphi} = 0$

De posse dessas relações , obteremos :

$g_{rr} = \sum_{\mu} (\frac{dx^{\mu}}{dr})^2 = (\frac{dx}{dr})^2 + (\frac{dy}{dr})^2 + (\frac{dz}{dr})^2 = 1$

$g_{\theta\theta} = \sum_{\mu} (\frac{dx^{\mu}}{d\theta})^2 = (\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2 + (\frac{dz}{d\theta})^2 = r^2$

$g_{\varphi\varphi} = r^2\mathrm{sen}^2\theta$

$g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$

assim,

$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\mathrm{sen}^2\theta d\varphi^2$

(b) Usaremos a “invariância da distância infinitesimal” para obter as componentes da métrica em vez da lei de transformação tensorial usada em (a). Primeiro, vejamos a equivalência dos dois métodos.

Invariância da transformação infinitesimal quer dizer:

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\rho\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma$

Usando as relações

$dx^\mu = \frac{dx^\mu}{dx'^\rho} dx'^\rho$ e $dx^\nu = \frac{dx^\nu}{dx'^\sigma} dx'^\sigma$

teremos:

$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx'^\rho} \frac{dx^\nu}{dx'^\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma = g'_{\rho\sigma} dx'^\rho dx'^\sigma$

Desde que $dx'^\rho dx'^\sigma$ é arbitrário, obteremos:

$g'_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx'^\rho} \frac{dx^\nu}{dx'^\sigma}$

que é simplesmente a Lei de transformação tensorial.

Assim sendo, dadas as transformações entre $\{x^\mu\}$ e $\{x'^\mu\}$:

$$t' = t$$

$$x' = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\varphi - \omega t)$$

$$y' = \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}(\varphi - \omega t) \quad (1)$$

$$z' = z$$

Estas transformam o sistema de coordenadas dado, em coordenadas polares esféricas, isto é:

$$\{t, x, y, z\} \mapsto \{t, r, \theta, \varphi\}$$

$$t = t$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \qquad (2)$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

Similarmente,

$$\{t', x', y', z'\} \mapsto \{t', r', \theta', \varphi'\}$$

$$t' = t'$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

(3)

$$\cos\theta' = \frac{z'}{r'}$$

$$\text{tg}\varphi' = \frac{y'}{x'}$$

Pode-se verificar facilmente, usando-se (2) e (3), que (1) pode ser expresso em termos de coordenadas polares esféricas:

$$t = t'$$

$$r = r'$$

$$\theta = \theta'$$

(4)

$$\varphi = \varphi' + \omega' t'$$

Que obviamente dá:

$$dt = dt'$$

$$dr = dr'$$

$$d\theta = d\theta'$$

(5)

$$d\varphi = d\varphi' + \omega' dt'$$

Agora, partindo de $ds^2 = - dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ e usando o resultado da parte (a) nesta última expressão, teremos:

$ds^2 = - dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\varphi^2$

Substituindo (5) na fórmula acima, obteremos:

$ds^2 = - dt'^2 + dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + r'^2 \text{sen}^2\theta' (d\varphi' + \omega' dt')^2$

$= - dt'^2 + dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + r'^2 \text{sen}^2\theta' d\varphi'^2 + 2r'^2 \text{sen}^2\theta' \omega' d\varphi' dt' + r'^2 \text{sen}^2\theta' \omega'^2 dt'^2$

Para obtermos a expressão em { t' , x' , y', z' }, usamos novamente o resultado na parte (a) e notamos que

$$r'^2 sen^2\theta' \omega'^2 = (x'^2 + y'^2)\omega'^2 \text{ de forma que}$$

$$ds^2 = [-1 + (x'^2 + y'^2)\omega'^2]dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + 2\omega'(x'^2 + y'^2)d\varphi'^2 dt' \quad (6)$$

$$tg\varphi' = \frac{y'}{x'} \text{ nos dá:}$$

$$d\varphi' = \frac{x'dy'}{x'^2+y'^2} - \frac{y'dx'}{x'^2+y'^2}$$

Substituindo em (6), obtemos finalmente

$$ds^2 = [-1 + (x'^2 + y'^2)\omega'^2]dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - 2\omega' y'dx'dt' + 2\omega' x'dy'dt'$$

A única coisa que falta é expressar as componentes de g da expressão para ds^2. Assim:

$$g_{t't'} = -1 + (x'^2 + y'^2)\omega'^2$$

$$g_{x'x'} = g_{y'y'} = g_{z'z'} = 1$$

Porém, ao tratarmos os termos cruzados, tais como $g_{t'x'}$, nós devemos ter cuidado. Apesar de ambos $g_{t'x'}$ e $g_{x't'}$ contribuírem com ds^2, por causa da simetria da métrica, existe somente um termo $-2\omega' y'dx'dt'$ aparecendo em ds^2. Isto indica que $g_{t'x'}$ é igual a $-\omega' y'$, em vez de $-2\omega' y'$. Similarmente, $g_{t'y'} = \omega' x'$. Assim:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 + (x'^2 + y'^2)\omega'^2 & -\omega' y' & \omega' x' & 0 \\ -\omega' y' & 1 & 0 & 0 \\ \omega' x' & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$g^{\mu'\nu'}$ pode ser obtido calculando-se a matriz inversa $g_{\mu'\nu'}$. Assim

$$g^{\mu'\nu'} = \begin{bmatrix} -1 & -\omega' y' & \omega' x' & 0 \\ -\omega y' & 1 - \omega'^2 y'^2 & \omega'^2 x' y' & 0 \\ \omega' x' & \omega'^2 x' y' & 1 - \omega'^2 x'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$