Introdução à Relatividade Geral

1ª Lista de Exercícios - Entrega dia 06/07/2006

Problema 1: Suponha que o espaço, e não o espaço-tempo, seja uma caixa, ou, em linguagem mais sofisticada, um 3-toro, de lado L. Com isto dizemos que há um sistema de coordenadas $x^\mu = \{t, x, y, z\}$ tal que todo ponto com coodenadas $\{t, x, y, z\}$ é identificado com todos pontos cujas coordenadas são $\{t, x + L, y, z\}$, $\{t, x, y + L, z\}$, ou $\{t, x, y, z + L\}$. Note que a coordenada temporal não se altera. Agora considere dois sistemas de referências, $\mathscr{O}$ e $\mathscr{O}'$, em que $\mathscr{O}$ está em repouso neste sistema de coordenadas (ou seja, suas coordenadas x, y e z não se modificam) e $\mathscr{O}'$ se move na direção de x com velocidade constante v. $\mathscr{O}$ e $\mathscr{O}'$ começam no mesmo evento (ponto), e enquanto $\mathscr{O}$ se mantém em repouso, $\mathscr{O}'$ dá uma volta completa no universo e encontra a trajetória de $\mathscr{O}$ sem precisar acelerar. Qual são os tempo próprios medidos por ambos neste intervalo? O resultado é consistente com seu entendimento da invariância de Lorentz?

Problema 2: Um próton, que é visto pela Terra como um "raio cósmico", viaja pelo espaço a alta velocidade. Se a energia de centro de massa for grande o suficiente, ele pode colidir com um fóton da radiação cosmológica de fundo, cuja temperatura é de 2,74 K no seu referencial de repouso, e converter este próton em um próton e um píon (cuja massa é 140 MeV. O píon decai subsequentemente em partículas não observáveis, enquanto o próton terá uma energia menor que antes da colisão. Com qual energia mínima o raio cósmico terá antes desta reação se tornar impossível? Este limiar de reação é conhecido como "cutoff" de Griesen-Zatsepin-Kuzmin (GZK). A propósito, há indícios de que este limiar é violado, o que pode ser o sinal de física nova, e houve mesmo sugestões de que a relatividade restrita é violada.

Problema 3: Vamos reescrever as equações de Maxwell de forma a explicitar sua covariância com as transformações de Lorentz. A partir das coordenadas do vetor campo elétrico e magnético, E^i e B^i defina o *tensor de Faraday*:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}, \qquad F_{i0} = E^i, \qquad F_{ij} = \epsilon_{ijk} B^k \tag{1}$$

(a) Mostre que as equações de Maxwell podem ser reescritas em termos do tensor de Faraday como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0 \tag{2}$$

(b) Mostre que, quando as equações de Maxwell são válidas, o *tensor de Energia-Momento*

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F^{\nu}{}_{\lambda} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{3}$$

é conservado, ou seja $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Problema 4: Prove que:

(a) Para dois eventos P e Q separados por uma distância do tipo tempo, há sempre um referencial inercial no qual os dois eventos acontecem no mesmo ponto do espaço (não do espaço-tempo!).

(b) Para dois eventos P e Q separados por uma distância do tipo espaço, há sempre um referencial inercial no qual os dois eventos são simultâneos.