



Cosmologia e Inflação

Notas de aula

Bruno Carneiro da Cunha

Sumário

1	Primeira Aula	2
1.1	A Métrica Espaço-Temporal	2
1.2	Relatividade Geral	4
1.3	Derivada Covariante	5
1.3.1	Métrica	5
1.3.2	Velocidade	5
1.3.3	Aceleração	6
1.3.4	Transporte paralelo. Cálculo da conexão	7
1.4	Curvatura. Equações de Einstein	9
2	Segunda Aula	12
2.1	A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	12
2.2	Princípios de positividade da Energia	15
2.3	O Big Bang	16
3	Terceira Aula	18
3.1	Homogeneidade e Isotropia do Universo	18
3.2	O Desvio para o Vermelho	20
3.3	A Evolução do Nosso Universo	21
3.4	Radiação Cosmológica de Fundo	23
3.5	Inflação. Fronteiras	24

1 Primeira Aula

1.1 A Métrica Espaço-Temporal

No cerne de toda teoria física está o conceito de **distância**. Na mecânica newtoniana, tomamos emprestado as regras da geometria euclideana para definir a distância entre dois pontos p e q como:

$$\bar{d}(p, q) = \sqrt{(x(q) - x(p))^2 + (y(q) - y(p))^2 + (z(q) - z(p))^2} \quad (1.1)$$

nesta visão, o tempo é uma variável adicional, cuja natureza não é métrica: o tempo, em mecânica newtoniana, é uma *parametrização universal* à qual todas as partículas devem se submeter. Até meados do século XIX, isto parecia ser uma verdade exata sobre o universo.

O que se seguiu é bastante conhecido: Maxwell propôs suas equações que regiam o comportamento do campo eletromagnético. Imediatamente se viu que tais equações prediziam o aparecimento de ondas eletromagnéticas que se moviam a uma velocidade fixa c . Pelas regras da mecânica newtoniana, isto significaria que havia um referencial inercial (o “éter”) relativo ao qual esta velocidade era medida. Após extensos trabalhos teóricos de Lorentz e Poincaré, e a tentativas frustradas de medir o movimento da Terra relativamente ao éter, Einstein propôs uma reconciliação da noção de relatividade em Mecânica com a Eletrodinâmica em 1905¹.

Muito se pode dizer sobre a mudança conceitual que a nova idéia de relatividade traz à Física em geral. Vamos tratar apenas da pequena parte que nos cabe. O princípio da relatividade de Einstein postula que não há éter: a velocidade c das ondas eletromagnéticas é uma propriedade fundamental do universo. Quaisquer dois referenciais inerciais medirão a mesma velocidade para c , mesmo que para isso seus conceitos de tempo e espaço sejam distorcidos. Não há mais o tempo absoluto, e o próprio conceito de distância muda. Na relatividade restrita, o conceito de posição engloba também o tempo no que se chama de *evento*. A distância entre dois eventos P e Q no espaço-tempo é, nesta formulação:

$$d(P, Q)^2 = c^2(t(P) - t(Q))^2 - (x(P) - x(Q))^2 - (y(P) - y(Q))^2 - (z(P) - z(Q))^2, \quad (1.2)$$

onde se vê uma dependência explícita da “posição no tempo” de um evento P . O novo conceito de distância é chamado de **tempo próprio**. O nome tem origem no fato que um observador em um referencial inercial \mathcal{O} segue uma linha reta no espaço-tempo:

$$\mathcal{O} : \begin{cases} t = t_0 + v_t \cdot s \\ x = x_0 + v_x \cdot s \\ y = y_0 + v_y \cdot s \\ z = z_0 + v_z \cdot s \end{cases} \quad (1.3)$$

E, como pode se ver, se o observador passa por P e Q , o tempo que ele contará entre os dois eventos será dado por (1.2).

É uma idéia intuitiva que alguém que se mova em uma trajetória dada por (1.3) seja um referencial inercial. De fato, pode-se provar que **todos** os referenciais inerciais movem-se em uma linha reta pelo espaço-tempo. A transformação que leva a trajetória de um referencial inercial em outro é chamada, na relatividade de Einstein, de **transformação de Poincaré**. Como se verá no Problema 1, todos referenciais inerciais concordam no valor de $d(P, Q)$, e assim pode-se definir alternativamente a transformação de Poincaré como aquela que mantém constante a distância $d(P, Q)$.

Com isto, dado um ponto fixo P , podemos repartir o espaço-tempo em três regiões distintas:

¹Uma excelente introdução histórica à teoria da relatividade de Einstein pode ser encontrada no livro [1].

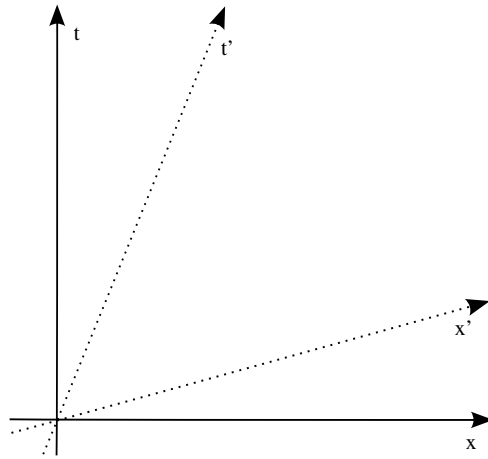


Figura 1: Dois referenciais inerciais em relatividade restrita, (t, x) e (t', x') . Note que as linhas t' e x' são ortogonais segundo a métrica (1.2).

- I. $d(P, Q)^2 > 0$: São os pontos que podem ser alcançados a partir de P por um corpo que se mova a velocidade sublumínica.
- II. $d(P, Q)^2 < 0$: Os pontos que não podem ser alcançados a partir de P por nenhum corpo que se mova a velocidade menor que c .
- III. $d(P, Q)^2 = 0$: O limite entre as regiões acima, os pontos que podem ser atingidos a partir de P apenas por raios de luz.

A região (III) é matematicamente um cone, como se pode ver de (1.2), e recebe o nome de **cone de luz**. A região (I) é chamada de **tipo tempo** e (II) de **tipo espaço**.

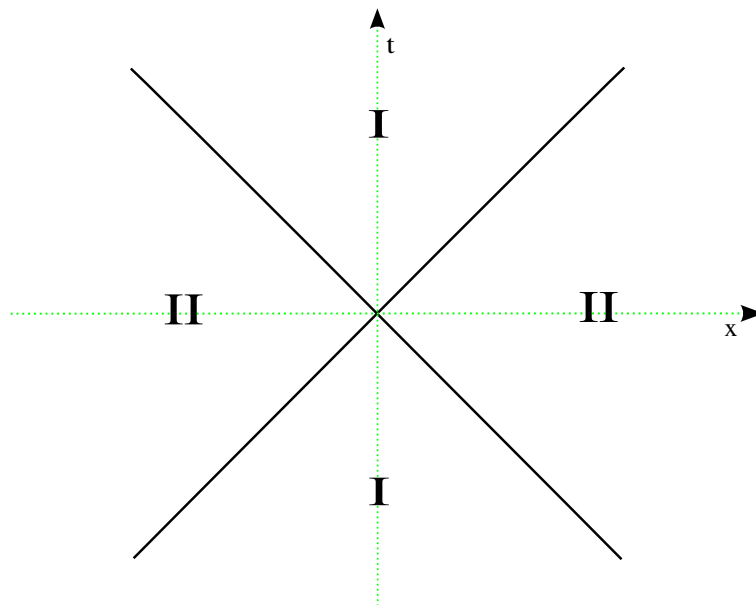


Figura 2: As três regiões descritas no texto. O cone de luz (linhas diagonais), dividem a região I (tipo tempo), da região II (tipo espaço).

Problemas

1. Mostre que dois referenciais inerciais \mathcal{O} e \mathcal{O}' que se movem a velocidades diferentes medirão a mesma distância entre P e Q .
2. Mostre que na parametrização do tempo próprio, onde a variação do parâmetro s entre dois pontos P e Q é dada por $d(P, Q)$, temos que

$$c^2 v_t^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2 = c^2.$$

3. Mostre que, se a distância entre dois eventos $d(P, Q)^2$ for negativa, haverá um referencial no qual estes eventos serão simultâneos.

1.2 Relatividade Geral

A partir da idéia de espaço-tempo embutida na Relatividade Restrita, Einstein pôs-se a tentar reformular a Lei da Gravitação de Newton. Procurava um princípio desta Lei que pudesse ser “traduzido” para o novo conceito de Relatividade. A idéia veio de um *gedankenexperiment* em que Einstein imaginava um observador, selado em um elevador em queda livre, fazendo experimentos. A menos que o observador tivesse acesso ao mundo exterior, postulava Einstein, nada que ele pudesse medir no interior do elevador diferenciaria o resultados dos seus experimentos dos experimentos conduzidos no espaço exterior, sob a ausência de gravidade. Dito de outra forma, o observador no elevador não conseguiria diferenciar seu elevador movendo-se a uma velocidade constante sob ação do campo gravitacional terrestre de um elevador movendo-se com aceleração constante g no espaço sideral.

Embutido na idéia acima está o **princípio da equivalência**, que diz que a massa, ou a quantidade de inércia de um corpo, é a mesma quer o corpo sofra a ação da força gravitacional (massa gravitacional), quer o corpo sofra qualquer outro tipo de força (massa inercial). Este princípio é verificado experimentalmente com grande precisão², e a partir dele Einstein postulou que a gravitação, sendo um fenômeno universal, era na verdade uma propriedade geométrica do espaço-tempo.

Segundo ele, tanto o elevador em queda livre quanto o elevador no espaço sideral seguiriam curvas sem aceleração *no espaço-tempo*. O fato de sentirmos a força da gravidade ao caminharmos sobre a Terra é, segundo Einstein, explicada pelo fato de sofrermos uma aceleração causada pelo chão aos nossos pés. Esta aceleração é sentida no espaço-tempo, e sua tradução no linguajar de mecânica clássica é a “força normal”, que vem contrabalançar a “força peso”. Assim, a “força peso” da mecânica Newtoniana ganha o mesmo status da “força centrífuga”: aparece apenas como a tradução das leis do movimento para um referencial não-inercial. Neste caso, o referencial não-inercial trata-se de uma pessoa caminhando sobre a Terra.

O que então definiria o conceito de “curva sem aceleração” no espaço-tempo? Einstein tomou emprestado aqui os conceitos de geometria riemanniana. Assim como a Relatividade, a geometria riemanniana tentava definir uma geometria baseada puramente no conceito de distância. Curvas sem aceleração são definidas claramente naquele caso, e podem ser definidas de maneira puramente análoga em Relatividade. A questão então é definir como e por qual agente a distância muda. Einstein aqui tentou formalizar uma série de idéias mais ou menos vagas sobre inércia que são conhecidas hoje em dia pelo **princípio de Mach**. Mach

²Experimentos conduzidos na década de 70 verificaram que a massa inercial não difere da massa gravitacional por mais que uma parte em um trilhão. Veja [2] para uma discussão sobre os resultados experimentais.

propunha que a matéria do universo agiria sobre este, de tal forma que os conceitos (ainda sob o âmbito da relatividade de Galilei) de “não-acelerado” só fariam sentido na presença de matéria. Einstein encarou este fato à luz de sua idéia: a presença de matéria (ou energia) *deformava* o espaço-tempo de tal forma que o seu conceito de distância (1.2), e desta forma o conceito de “curva sem aceleração” mudaria. Como exatamente se processa esta mudança será o objeto de estudo das próximas seções.

1.3 Derivada Covariante

Nesta seção desenvolveremos algumas das ferramentas matemáticas que nos serão úteis no estudo da Relatividade Geral. O tratamento será superficial e apelará sempre ao conhecimento intuitivo, como em [3]. Para um estudo mais aprofundado, veja [4] e/ou [5].

1.3.1 Métrica

Como primeiro passo para descrever a Gravitação como uma teoria geométrica, precisamos desenvolver algumas ferramentas para lidar com espaços cujo conceito de distância depende do ponto particular do espaço. Iniciemos com um raciocínio diferencial, então. A forma infinitesimal de (1.2) é (faremos $c = 1$ daqui em diante):

$$ds^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \quad (1.4)$$

Lembremos agora o primeiro postulado da Relatividade Geral: em um ponto qualquer do espaço-tempo, digamos P , podemos escolher um sistema de coordenadas em queda livre, no qual a distância infinitesimal será dada pela fórmula acima. Neste ponto P , em particular, a distância será sempre dada por (1.4), mas em um ponto qualquer ela será em geral diferente, dada por:

$$ds^2 = \sum_{ab} g(P)_{ab} (dx)^a (dx)^b = \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ g_{xt} & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yt} & g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zt} & g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

Onde, para cada ponto P do espaço-tempo, podemos introduzir uma mudança de base que traz $g(P)_{ab}$ para a forma “canônica” (1.4). g_{ab} é assim o que os matemáticos chamam de matriz associada a uma *aplicação bilinear com assinatura* $(+, -, -, -)$. Como g_{ab} é diagonalizável, deve também ser simétrica: $g_{ab} = g_{ba}$, e como não há direções nulas no espaço-tempo, deve ser não-degenerada. O símbolo g_{ab} é chamado de **métrica**. É costumeiro suprimir o símbolo de somatório em (1.5), de forma que a soma sobre índices repetidos em uma expressão é subentendida. Vamos fazê-lo de agora em diante.

1.3.2 Velocidade

Outro conceito fundamental para a descrição de partículas no espaço-tempo são a *velocidade* e *aceleração*³. Neste caso podemos usar de um pouco de intuição e imaginar trajetórias em nosso espaço-tempo. Suponha que tal curva passe por um ponto P . De novo, temos uma idéia intuitiva de que a velocidade da partícula no ponto P é um vetor: partículas passam por P

³O que entendemos por velocidade e aceleração é conhecido nos livros de física básica por 4-velocidade e 4-aceleração, respectivamente

com diferentes direções e rapidez variável. Podemos então inverter o raciocínio e definir um *vetor sobre P* como a velocidade de uma (classe de equivalência) das curvas que passem por *P*.

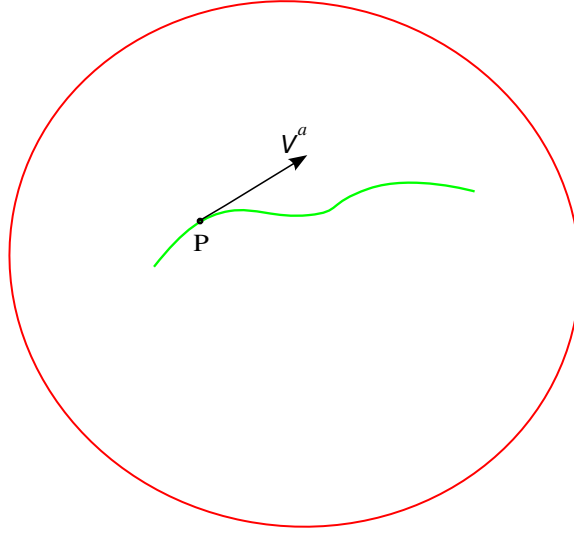


Figura 3: Como construir um vetor em um espaço-tempo curvo. A curva desenhada pode ser vista como a trajetória de uma partícula, e sua velocidade no ponto *P* é o vetor V^a .

Esta idéia de vetor se aplica imediatamente a outro conceito fundamental: o de *derivada direcional*. Se f for uma função do espaço-tempo, podemos calcular sua derivada na direção do vetor V^a em P agindo da seguinte forma: seja γ uma curva que passe por P com velocidade V^a . A restrição de f em γ é uma função escalar em uma dimensão, e sua derivada pode, assim, ser calculada por métodos elementares. O resultado é a derivada direcional de f na direção V^a , também chamada por $V^a \partial_a f$. O caso usual é pensar na função f como uma coordenada, digamos x , do espaço-tempo. Assim, a derivada direcional de x na direção V^a dará a “componente x do vetor V^a ”. Outros casos são análogos.

1.3.3 Aceleração

Se o conceito de velocidade é intuitivo e facilmente generalizado, o conceito de aceleração é um pouco mais envolvido. A primeira coisa que temos de levar em conta é que a aceleração, definida como a derivada temporal da velocidade, não é sempre um vetor. Pela definição que demos acima, um vetor é sempre tangente ao espaço-tempo, e podemos facilmente considerar o exemplo do movimento circular uniforme em que a aceleração não o é. O truque parece ser, então, **projetar** a derivada de um vetor de forma que ele seja sempre tangente. Substituindo a derivada temporal com a derivada direcional na direção do movimento, a definição de aceleração deve ser:

$$A^a \equiv V^a \nabla_a V^b = V^a \partial_a V^b + \Gamma^b_{ac} V^a V^c \quad (1.6)$$

Onde os símbolos se encarregam de “projetar” as componentes normais de $V^a \partial_a V^b$ de forma que a aceleração dada por (1.6) seja um vetor. Voltando ao exemplo do movimento circular uniforme, estamos projetando a componente normal de tal forma que apenas variações de velocidade tangencial entrem no cálculo da aceleração. O símbolo Γ é conhecido em matemática

por **conexão**, e neste caso particular é batizado pelos físicos de **Símbolos de Christoffel**. Vemos então que o objeto

$$\nabla_a V^b = \partial_a V^b + \Gamma^b_{ac} V^c \quad (1.7)$$

não tem componentes normais ao espaço tempo, e ∇_a é chamado de **derivada covariante**.

Uma curva sem aceleração, uma **geodésica**, é, então aquela em que seu vetor velocidade satisfaz

$$V^a \nabla_a V^b = 0. \quad (1.8)$$

Mas isto é, infelizmente, apenas metade do problema, pois ainda não sabemos como calcular $\nabla_a V^b$ a partir do conhecimento da distância, ou da métrica. Para isto temos que continuar nosso *detour* matemático.

1.3.4 Transporte paralelo. Cálculo da conexão

A partir da idéia básica que partículas pontuais executam uma trajetória no espaço-tempo, somos levados imediatamente ao conceito de **campo vetorial**. O exemplo básico deste é o conjunto de velocidades de várias partículas, ou um fluido, no espaço-tempo. A cada ponto, teremos então um vetor velocidade $V^a(P)$. Torna-se crucial, então, achar uma maneira de comparar velocidades em diferentes pontos do espaço.

Isto pode ser feito de forma diferencial analisando a equação (1.6). Note que podemos ver a aceleração de forma parecida: como o vetor velocidade muda em pontos separados por uma pequena distância $V^a(dx)_a$. Da mesma forma, para compararmos o vetor $T^a(P)$ em um ponto P do espaço-tempo com outro vetor $T^a(Q)$ em outro ponto do espaço-tempo, temos que fazer o **transporte paralelo** de P a Q , ou seja, dada uma curva que liga P a Q , cujo vetor tangente V^a não seja necessariamente do tipo-tempo, podemos definir um vetor $T^a_\gamma(Q)$ para qualquer ponto Q sobre a curva, pela condição que:

$$V^a \nabla_a T^b_\gamma = 0. \quad (1.9)$$

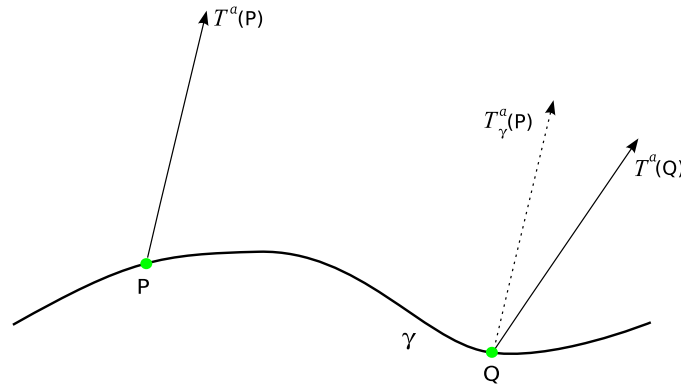


Figura 4: O transporte paralelo do vetor T^a . O arraste de $T^a(P)$ sobre a curva γ gera um vetor sobre o ponto Q , que pode então ser comparado com o próprio valor do campo vetorial naquele ponto $T^a(Q)$.

Considere então uma partícula que se move pelo espaço-tempo com uma velocidade V^a . Em um dado ponto P de sua trajetória., tal partícula pode introduzir uma base de vetores ortonormais $\{E_i^a\}$ de forma que qualquer vetor W^a possa ser decomposto. A questão é, então, como reconstruir tal vetor em outro ponto Q da sua trajetória. Proceda-se da seguinte

maneira: guarda-se os valores das componentes $g_{ab}E_i^aW^b$, faz-se o transporte paralelo dos vetores da base até o ponto Q e então reconstrói-se o vetor W^a somando-se as componentes:

$$W^a(Q) = \sum_i (g_{bc}E_i^bW^c)E_i^a(Q) \quad (1.10)$$

Confrontando-se essa idéia intuitiva com a definição dada em (1.9), vê-se que as duas visões coincidem se o produto interno

$$g_{bc}E_i^bW^c \quad (1.11)$$

for invariante por transporte paralelo. Como E_i^b é uma base, chegamos à conclusão que isto é verdade se e somente se

$$\nabla_a g_{bc} = 0, \quad (1.12)$$

ou seja, a métrica é **covariantemente constante**.

Veja que o produto interno $g_{ab}V^aW^b$ é uma função escalar, cuja derivada, como vimos na subseção 1.3.2, é sempre tangente ao espaço-tempo. Desta forma podemos simplesmente dizer que a derivada covariante é igual a derivada comum neste caso:

$$\nabla_c (g_{ab}V^aW^b) = \partial_c (g_{ab}V^aW^b) \quad (1.13)$$

Usando a regra de Leibnitz em ambos os lados e a definição de derivada covariante para vetores (1.7) obtemos

$$\nabla_c g_{ab} = \partial_c g_{ab} - \Gamma^d_{cb}g_{ad} - \Gamma^d_{ac}g_{db} \quad (1.14)$$

pois os vetores V^a e W^a são genéricos. Outra requisição que teremos sobre os Γ é a **ausência de torção**,

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f, \quad (1.15)$$

para qualquer função f . Expandindo ambos os lados vemos que os símbolos de Christoffel são simétricos nos índices inferiores:

$$\Gamma^a_{bc} = \Gamma^a_{cb} \quad (1.16)$$

Agora temos condições de resolver a condição (1.12) e encontrar os símbolos de Christoffel. Definindo-se $\Gamma_{dbc} = \Gamma^a_{bc}g_{ad}$, pode-se reescrever a equação (1.14) como:

$$\Gamma_{acb} + \Gamma_{bac} = \partial_c g_{ab} \quad (1.17)$$

Somando as três permutações cíclicas e usando a condição de torção zero (1.16), podemos resolver o sistema para Γ :

$$\Gamma^d_{bc} = \frac{g^{ad}}{2} (\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ba} - \partial_a g_{bc}) \quad (1.18)$$

onde introduzimos a inversa da métrica $g^{ad}g_{db} = \delta_b^a$, onde δ_b^a é o delta de Kronecker.

Problemas

1. Mostre que a assinatura (isto é, os sinais dos auto-valores) de g_{ab} é independente da base que escolhermos.
2. Considere uma partícula movendo-se com velocidade constante sobre a superfície de uma esfera a latitude constante θ . Calcule o vetor velocidade, e mostre que sua aceleração é normal à esfera apenas quando a partícula se move sobre o equador $\theta = \pi/2$.

3. Para um elemento de linha riemanniano dado por

$$d\bar{s}^2 = d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi d\psi^2 \quad (1.19)$$

calcule a métrica g_{ab} , sua inversa g^{ab} e os símbolos de Christoffel associados.

4. Repita o exercício acima para o elemento de linha:

$$d\bar{s}^2 = d\theta^2 + \cosh^2 \theta d\phi^2 + \cosh^2 \theta \cos^2 \phi d\psi^2 \quad (1.20)$$

(Dica: É basicamente a mesma conta, mas cuidado com os sinais.)

1.4 Curvatura. Equações de Einstein

Antes de apresentar uma interpretação física para o conceito de curvatura do espaço-tempo, vamos apresentar outro conceito, o de coordenadas e sua relação com a base de vetores. Como vimos acima, se f é uma função do espaço-tempo, a sua derivada direcional em relação ao tempo t é dada por

$$\frac{df}{dt} = T^a \nabla_a f \quad (1.21)$$

Onde T^a é o vetor gradiente da função t . Da mesma forma podemos ter a derivada direcional em direção a uma componente espacial, digamos x :

$$\frac{df}{dx} = X^a \nabla_a f \quad (1.22)$$

Podemos então ver que a imposição de que estas derivadas comutem

$$\frac{d^2 f}{dx dt} = \frac{d^2 f}{dt dx} \quad (1.23)$$

resulta em uma condição para os vetores X^a, T^a :

$$(T^a \nabla_a X^b) \nabla_b f = (X^a \nabla_a T^b) \nabla_b f \quad (1.24)$$

que não é obviamente válido para qualquer sistema de coordenadas escolhido. Diz-se então que uma base de vetores que satisfaça a **condição de comutação**

$$[X, T]^b = X^a \nabla_a T^b - T^a \nabla_a X^b = 0 \quad (1.25)$$

é chamada de **base coordenada**.

A introdução de base coordenada é necessária para que possamos entender melhor o conceito de curvatura. Considere dois observadores que seguem duas trajetórias geodésicas separadas por um pequeno deslocamento espacial $X^a(dx)_a$. Chamemos T^a o campo vetorial de velocidades destas geodésicas. Pode-se provar pelo teorema de Frobenius, que o vetor X^a pode ser escolhido de forma que X^a e T^a seja uma base coordenada, isto é (1.25) é válido. Calculemos então a aceleração que os dois observadores têm em relação ao outro, ou seja

$$A^a = \frac{d^2}{dt^2} X^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \quad (1.26)$$

Desenvolvendo, com ajuda de (1.25) e da regra de Leibnitz,

$$A^a = T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) = T^c (\nabla_c X^b) \nabla_b T^a + T^c X^b \nabla_c \nabla_b T^a$$

Assim,

$$A^a = (X^c \nabla_c T^b) \nabla_b T^a + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - X^b T^c (\nabla_b \nabla_c - \nabla_c \nabla_b) T^a$$

ou

$$A^a = X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \quad (1.27)$$

onde o primeiro termo do lado direito se anula pela equação da geodésica (1.8). O símbolo

$$R_{cbd}{}^a T^d \equiv -(\nabla_c \nabla_b - \nabla_b \nabla_c) T^a \quad (1.28)$$

é chamado **tensor de Riemann** e, como pode ser verificado explicitamente pela definição de derivada covariante, não depende das derivadas de T^a . O sinal na equação acima serve para conformidade com a definição padrão, que usa o transporte paralelo. Podemos pensar na curvatura assim como uma medida da aceleração que dois observadores em queda livre têm no espaço-tempo.

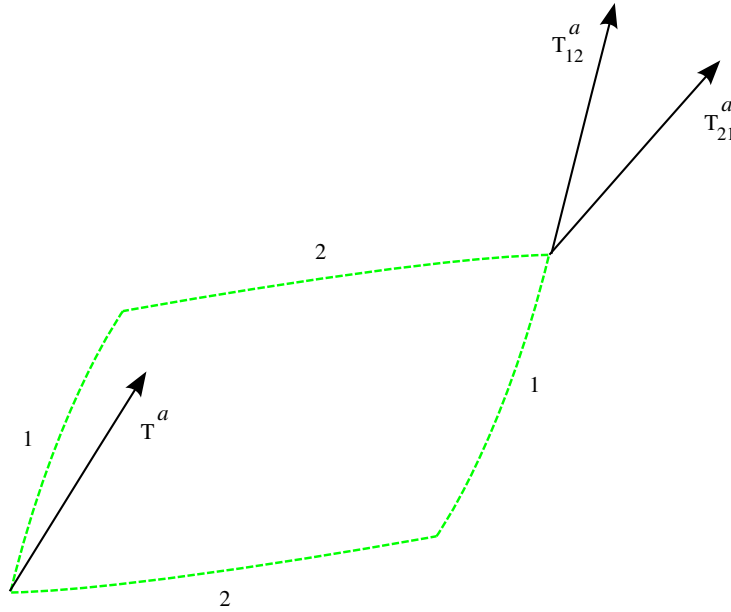


Figura 5: A curvatura como a diferença entre dois transportes paralelos cuja ordem é trocada. A diferença entre os vetores T_{12}^a e T_{21}^a é proporcional ao tensor de Riemann.

De fato, considere o processo de transporte paralelo na Figura 1.4. Após o transporte paralelo na direção 1, o vetor T^a muda por

$$\delta_1 T^a = \lambda \xi^b \nabla_b T^a \quad (1.29)$$

onde ξ^b é paralelo à direção 1 e λ é um parâmetro pequeno. Se ζ^b é paralelo à 2, teremos, após o transporte,

$$\delta_{12} T^2 = \lambda^2 \zeta^c \nabla_c (\xi^b \nabla_b T^a). \quad (1.30)$$

Invertendo a ordem do transporte e usando a condição de comutatividade entre ξ^a e ζ^a , poderemos ver que a diferença entre os dois transportes paralelos é proporcional ao tensor de Riemann.

O tensor de Riemann possui várias simetrias e propriedades interessantes. A mais óbvia é a anti-simetria nos dois primeiros índices ($R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$). Com algum trabalho, pode-se

provar que há uma simetria de transposição do tensor de Riemann com índices covariantes: $R_{abcd} = R_{cdab}$. Outra simetria é a chamada **Identidade de Bianchi**:

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0 \implies \nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e + \nabla_c R_{abd}{}^e = 0 \quad (1.31)$$

Onde na equação à esquerda usamos a notação de anti-simetrização entre índices colocando-os entre colchetes, e a expandimos usando a propriedade de anti-simetria do tensor de Riemann. A identidade pode ser provada usando a definição de derivada covariante (1.7) e do tensor de Riemann (1.28).

Contraindo Bianchi (1.31) com $g^{bd}\delta_e^a$, vemos que:

$$2\nabla^a R_{ac} - \nabla_c R = 0 \quad (1.32)$$

onde $R_{ac} = R_{abc}{}^b$ é o **tensor de Ricci** e $R = g^{ac}R_{ac}$ é o **escalar de curvatura**. A equação acima nos diz que o tensor

$$G_{ac} = R_{ac} - \frac{1}{2}g_{ac}R \quad (1.33)$$

obedece a uma lei de conservação, $\nabla_a G^{ac} = 0$. Este tipo de lei de conservação é verificada em vários sistemas físicos, como o eletromagnetismo, mecânica dos fluidos e meios elásticos. A diferença é que nos sistemas físicos esta lei de conservação é obedecida pelo **tensor de energia-momento**, T_{ac} . Vamos nos demorar por uma boa parte do curso nas propriedades deste tensor, mas por enquanto nos basta dizer que Einstein se inspirou neste simples fato para postular sua equação para a “geometrodinâmica” do espaço-tempo:

$$R_{ac} - \frac{1}{2}g_{ac}R = \frac{8\pi G_N}{c^2} T_{ac} \quad (1.34)$$

onde G_N é a constante da gravitação universal. Nas duas próximas aulas nos ocuparemos em mostrar o que (1.34) tem a dizer sobre a evolução do universo.

Problemas

1. Use o fato que $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ onde $f = T^a \omega_a$ para mostrar que

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad (1.35)$$

o que dá a definição do tensor de Riemann em termos da ação da derivada covariante em um campo vetorial dual ω_d^* .

2. Mostre que $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)T^c$ é linear

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(fT^c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)T^c \quad (1.36)$$

e assim $R_{abc}{}^d$ definido por (1.28) é de fato um tensor.

3. Como $\nabla_a g_{bc} = 0$, então a derivada covariante comuta naturalmente quando aplicada na métrica. Expanda $\nabla_{[a} \nabla_{b]} g_{cd} = 0$ e verifique que $R_{abcd} = R_{cdab}$.
4. Use a definição do tensor de Riemann para calcular $R_{abc}{}^d$ em termos dos símbolos de Christoffel. Resposta:

$$R_{abc}{}^d = \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_a \Gamma_{bc}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ea}^d. \quad (1.37)$$

*O vetor dual também é chamado de **vetor covariante** ou **1-forma**.

2 Segunda Aula

O objetivo desta aula é introduzir, com o mesmo caráter de rigor (ou falta de) que tivemos na aula passada, as ferramentas necessárias para estudar as soluções da equação de Einstein que serão úteis para o estudo de cosmologia. Falaremos um pouco do Big Bang e dos teoremas de singularidade neste capítulo.

2.1 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

De especial interesse para nós vão ser as soluções da equação de Einstein (1.34) que possuem as propriedades de homogeneidade e isotropia. Vamos tentar traduzir estas propriedades em termos da métrica g_{ab} .

Considere um campo vetorial ξ^a que seja, a cada ponto do espaço-tempo, tangente à trajetória de um observador em queda livre que passe por aquele ponto. Como ξ^a é uma velocidade, podemos usar a parametrização de tempo próprio para normalizá-lo: $\xi^a \xi_a = -1$. Ao diferenciarmos esta equação notamos que o tensor $\nabla_a \xi^b$ é não apenas tangencial ao espaço-tempo, mas também ortogonal à ξ^b , pois pela equação da geodésica $\xi^a \nabla_a \xi^b = 0$.

Para obter uma interpretação física de $\nabla_a \xi^b$ e sua importância no estudo das soluções de (1.34) que procuramos, vamos introduzir um sistema de base coordenadas de vetores, *i. e.* uma base de vetores X_i^a que comutem com ξ^a . Como vimos, o transporte paralelo de X_i^a ao longo das geodésicas é dado por

$$\xi^a \nabla_a X_i^b = X_i^b \nabla_b \xi^a, \quad (2.1)$$

onde o lado direito é obtido por meio de (1.25). Assim, podemos pensar em $\nabla_a \xi^b$ como o *operador linear* que implementa o transporte paralelo infinitesimal ao longo das trajetórias dos observadores. O fato de $\nabla_a \xi^b$ ser ortogonal a ξ^b nos dois índices nos assegura que esta transformação linear é naturalmente reduzida ao subespaço ortogonal a ξ^a . Podemos decompor o operador em três partes, a saber:

$$\nabla_a \xi_b = \theta h_{ab} + \omega_{ab} + \sigma_{ab} \quad (2.2)$$

Onde $h_{ab} = g_{ab} + \xi_a \xi_b$ é a projeção da métrica no subespaço ortogonal a ξ^a , e $\omega_{ab} = \omega_{[ab]}$ e $\sigma_{ab} = \sigma_{(ab)}$ são respectivamente as componentes antisimétricas e simétricas de $\nabla_a \xi_b$. Para definir a função θ unicamente, iremos requerer que o traço de σ_{ab} seja nulo, ou $\sigma_{ab} g^{ab} = \sigma_{ab} h^{ab} = 0$.

Vamos argumentar agora que, em um espaço homogêneo e isotrópico, a única parcela não nula de (2.2) é o traço θ . De fato, seu efeito nos vetores X_i^a é apenas dilatá-los, o que mantém as propriedades de homogeneidade, se θ não depender da posição espacial. Os tensores ω_{ab} e σ_{ab} , por outro lado, têm uma ação incompatível com estas propriedades, como podemos ver na Figura 6.

Como se vê no curso de mecânica, a partir de um tensor anti-simétrico, podemos associar uma rotação no espaço. Desta forma, se σ_{ab} estiver presente na expansão (2.2), o seu efeito será o de girar a base de vetores de tal forma que um observador separado por um ponto X_i^a sofrerá uma rotação. Obviamente não podemos fazer esta rotação constante por todo o espaço, de forma que $\omega_{ab} \neq 0$ é incompatível com o critério de homogeneidade.

Da mesma forma, o efeito de σ_{ab} é gerar um cisalhamento no espaço de forma que os vetores X_i^a sejam contraídos ou dilatados de forma a manter o volume constante. Isto é obviamente incompatível com o critério de isotropia.

Assim temos, para um espaço homogêneo e isotrópico:

$$\nabla_a \xi_b = \theta(t)(g_{ab} + \xi_a \xi_b) \quad (2.3)$$

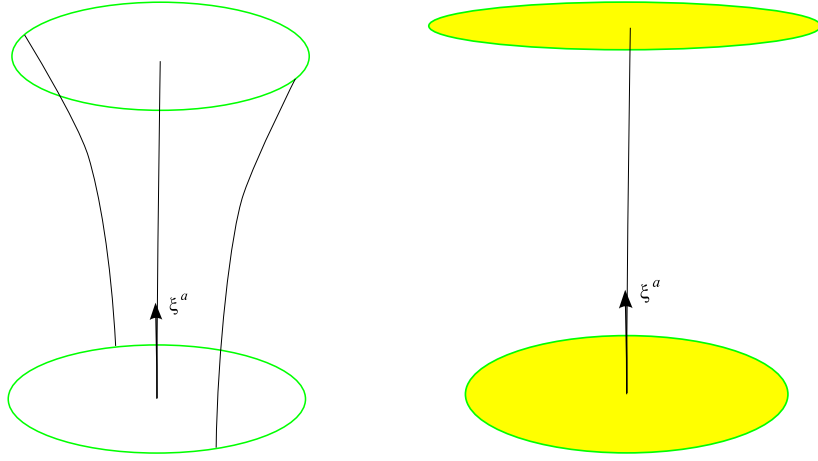


Figura 6: A interpretação geométrica de ω_{ab} e σ_{ab} , respectivamente à esquerda e à direita. Note que ω_{ab} apenas roda as geodésicas próximas, enquanto σ_{ab} não altera a área do círculo.

com o **fator de expansão**, $\theta(t)$ constante pelo espaço, embora possa obviamente mudar com o tempo.

Pode-se ver que h_{ab} definido acima gera uma métrica do espaço ortogonal a ξ^a . Esta métrica é chamada de **métrica induzida** e tem assinatura $(+, +, +)$, ou seja, é **riemanniana**. O espaço ortogonal a ξ^a também é chamado, por motivos óbvios de **seção espacial** do espaço-tempo. Em espaços homogêneos e isotrópicos, temos que restringir esta métrica riemanniana de forma que, por exemplo, sua curvatura seja constante. Isto nos deixa três opções para o elemento de linha associado a h_{ab} :

$\bar{R} = 0$: Neste caso podemos tomar o espaço como euclideano:

$$d\bar{s}_0^2 = a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.4)$$

$\bar{R} < 0$: Neste caso o espaço é dito *hiperbólico*:

$$d\bar{s}_-^2 = a^2(t)(d\chi^2 + \cosh^2 \chi d\theta^2 + \cosh^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.5)$$

Confira (1.20). A curvatura aqui é $\bar{R} = -6/a^2(t)$.

$\bar{R} > 0$: Neste caso o espaço é dito *esférico*:

$$d\bar{s}_+^2 = a^2(t)(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\phi^2 + \cos^2 \theta \cos^2 \phi d\psi^2) \quad (2.6)$$

Confira (1.19) e o elemento de linha euclidiano em coordenadas esféricas. A curvatura é $\bar{R} = +6/a^2(t)$.

Nos casos acima, a curvatura \bar{R} associada aos elementos de linha do espaço $d\bar{s}_{0,\pm}^2$ é chamada de **curvatura extrínseca**, ou **curvatura tri-dimensional**. Espaços como os descritos acima são chamados **maximalmente simétricos**. Seu tensor de Riemann associado aos elementos de linha acima é dado por:

$$\bar{R}_{abcd} = \frac{\bar{R}}{6}(h_{ac}h_{bd} - h_{ad}h_{bc}) \quad (2.7)$$

Onde \bar{R} é o escalar de curvatura, dado acima para os casos de interesse.

Note que, como $a(t)$ é uma função do tempo apenas, não depende das coordenadas espaciais e pode para efeitos dos argumentos acima ser considerada uma constante. No que se segue vamos fazer $d\bar{s}_{0,\pm}^2 = a^2(t)d\Sigma_{0,\pm}^2$.

De posse destes fatos, vemos que a métrica de um espaço-tempo homogêneo e isotrópico tem de ser da forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma_{0,\pm}^2 \quad (2.8)$$

onde o **fator de escala** $a(t)$ está relacionado com o fator de expansão por:

$$\theta(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}. \quad (2.9)$$

As métricas do tipo (2.8) são chamadas de **métricas de Friedmann-Robertson-Walker**, ou métricas FRW, em homenagem aos seus descobridores.

A pergunta natural que se põe a esta altura é *qual distribuição de matéria devemos ter para que a solução seja da forma proposta por FRW?* Podemos, ao invés de simplesmente calcular o tensor de Einstein para (2.8), usar de dois simples argumentos heurísticos. O primeiro restringe a forma do tensor de energia-momento a ser diagonal, isto é, os componentes T_{ab} têm de se anular quando $a \neq b$. O raciocínio por trás disso é o mesmo que usamos para ω_{ab} acima: um influxo de matéria mudando de direção, inclusive entre direções espaciais e a direção temporal faria com que o sistema adquirisse uma rotação (isto é melhor visto quando as direções envolvidas são espaciais), violando o princípio de homogeneidade.

O segundo argumento tem a ver com a isotropia, e diz simplesmente que as componentes espaciais-espaciais de T têm de ser iguais. Novamente, mais estresse na direção z que na direção y , por exemplo, violaria a isotropia do espaço, e desta forma a restrição de T nas componentes espaciais tem de ser proporcional a h_{ab} , com a constante de proporcionalidade sendo uma função do tempo apenas. Assim, T terá a forma

$$T_{ab} = \rho \xi_a \xi_b + P(g_{ab} + \xi_a \xi_b) \quad (2.10)$$

com ρ e P funções do tempo. Em mecânica dos fluidos, um tensor T_{ab} desta forma pode ser encontrado desde que o fluido em questão seja **perfeito**, em configuração isotrópica e homogênea. Por simplicidade, nos referiremos a (2.10) como o tensor de energia-momento de um **fluido perfeito**. Neste caso as funções ρ e P são, respectivamente, a **densidade de energia** e **pressão** do fluido.

Problemas

1. Para uma métrica FRW com espaço euclideo:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.11)$$

verifique (2.9) diretamente pelo cálculo de $\nabla_a \xi^a$, onde $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = (1, 0, 0, 0)$.

2. Generalize o resultado do problema anterior para a métrica genérica (2.8) usando o fato que o elemento de linha $d\Sigma_{0,\pm}^2$ em (2.8) não depende do tempo, e que, devido à forma do símbolo de Christoffel (1.18) envolvido, esta é a única derivada que contribui para o cálculo de $\nabla_a \xi^a$.
3. Mostre que a condição de conservação do tensor de energia momento, também chamado neste caso de **equação da continuidade**, $\nabla^a T_{ab} = 0$ implica, na ausência de pressão $P = 0$, em

$$\dot{\rho} + 3\theta\rho = 0. \quad (2.12)$$

2.2 Princípios de positividade da Energia

Nós sabemos que, mesmo em um contexto cosmológico, a pressão e a densidade de energia do universo são funções que devem obedecer a certas requisições físicas. Sabemos, por exemplo que a densidade de energia não pode ser negativa. Assim, a questão que se põe é o que se pode dizer sobre a evolução do espaço-tempo a partir de prescrições básicas sobre o tensor de energia-momento? Surpreendentemente, pode-se dizer bastante com apenas restrições simples e naturais.

Vamos começar calculando a segunda derivada de ξ^a :

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b \xi_c &= \nabla_a (\theta (g_{bc} + \xi_b \xi_c)) \\ &= -\xi_a \dot{\theta} (g_{bc} + \xi_b \xi_c) + \theta ((\nabla_a \xi_b) \xi_c + \xi_b \nabla_a \xi_c) \\ &= -\xi_a \dot{\theta} (g_{bc} + \xi_b \xi_c) + \theta^2 (g_{ab} \xi_c + g_{ac} \xi_b + 2\xi_a \xi_b \xi_c)\end{aligned}$$

onde na segunda linha usamos que θ é uma função apenas do tempo, e assim $\nabla_a \theta = -\xi_a \xi^b \nabla_b \theta$. Anti-simetrizando em relação a a e b , e usando a definição do tensor de Riemann (1.28), obtemos:

$$\nabla_{[a} \nabla_{b]} \xi_c \equiv R_{abc}{}^d \xi_d = -(\dot{\theta} + \theta^2) \xi_{[a} g_{b]c}. \quad (2.13)$$

Contraindo a equação acima com g^{ac} , e usando as propriedades do tensor de Riemann, obtemos:

$$R_{bd} \xi^d = -(\dot{\theta} + \theta^2) (\xi_b - 4\xi_b). \quad (2.14)$$

E finalmente, usando as equações de Einstein⁴

$$R_{bd} = 8\pi G_N (T_{bd} - \frac{1}{2} g_{bd} T) \quad (2.15)$$

onde $T = g_{ab} T^{ab}$ é o traço do tensor energia-momento, obtemos a **Equação de Raychaudhuri**:

$$\dot{\theta} + \theta^2 = -\frac{1}{3} \xi^b R_{bd} \xi^d = -\frac{8\pi G_N}{3} \left(\xi^b T_{bd} \xi^d + \frac{1}{2} T \right). \quad (2.16)$$

Note que, no sistema de coordenadas em que $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = (1, 0, 0, 0)$, $\xi^b T_{bd} \xi^d$ é a componente $t-t$ puramente temporal do tensor energia momento. Em termos do tensor energia-momento do fluido perfeito (2.10), $\xi^b T_{bd} \xi^d = \rho$ é a densidade de energia. Por outro lado, o traço do tensor energia momento também pode ser facilmente calculado de (2.10):

$$T = g^{ab} (\rho \xi_a \xi_b + P (g_{ab} + \xi_a \xi_b)) = -\rho + 3P \quad (2.17)$$

Assim, se $\xi^a T_{ab} \xi^b + \frac{1}{2} T \geq 0$, ou seja, para um fluido perfeito,

$$\rho + 3P \geq 0 \quad (2.18)$$

dizemos que a distribuição de matéria-energia satisfaz a **condição forte de energia**.

O poder da condição forte de energia vem do fato que, neste caso, o lado esquerdo da Equação de Raychaudhuri é negativo (2.16). Então podemos colocar um limite superior em θ :

$$\dot{\theta} \leq -\theta^2 \implies \theta(t) \leq \frac{1}{t - t_0}. \quad (2.19)$$

⁴A equação é obtida contraindo (1.34) com g^{ac} , obtendo $R = -8\pi G_N T$.

Note porém, que se em algum momento t_i , θ_i for negativo, então $t_i < t_0$ e em, no máximo, um intervalo de tempo próprio finito $t_0 - t_i = -1/\theta_i$, θ decrescerá indefinidamente:

$$\theta_i < 0 \implies \theta \rightarrow -\infty \text{ em um tempo próprio finito!} \quad (2.20)$$

Esta propriedade é chamada de **focagem das geodésicas** e resulta que todos os observáveis colapsarão em um ponto em um tempo finito. As condições iniciais de $\theta_i < 0$ é verificada, por exemplo, em uma estrela na fase final de sua vida. As equações de Einstein prevem, por meio de (2.16), que um ponto de **singularidade** se formará, onde $\theta \rightarrow -\infty$ se formará. Note que, em termos do fator de escala (2.9), isto implica que $a(t) \rightarrow 0$, o que é de fato preocupante!

O teorema (2.20), ou melhor a versão completa deste onde σ_{ab} e ω_{ab} não são nulos, foi provado pela primeira vez por S. Hawking e R. Penrose [6] e marcou um novo interesse na Relatividade Geral pois demonstrou que as singularidades que aparecem em várias soluções das equações de Einstein podem na verdade carregar informações físicas e não apenas tratarem-se de suposições não-naturais. O exemplo mais famoso deste tipo de singularidade é a que aparece na solução de Schwarzschild para um corpo massivo esféricamente simétrico. Por muito tempo desconsiderou-se a singularidade por aparecer apenas quando supomos que o corpo massivo é na verdade pontual. Os estudos de S. Chandrasekhar [7] sobre a estabilidade de estrelas, por outro lado, provaram que é justamente isto que aparenta acontecer nos estágios finais de evolução de uma estrela muito massiva.

Desde então tem-se tentado entender o que exatamente acontece com esta singularidade em particular à medida que o tempo evolui. Como veremos a seguir, este problema é análogo à singularidade inicial do universo. Apesar de grandes anúncios recentes [8], não se tem certeza exata da existência ou não-existência, tanto teórica quanto experimental, do ponto de foco das geodésicas. Podemos, contudo, tomar emprestado o ponto de vista das soluções das equações de movimento da eletrodinâmica clássica quando se incorpora os efeitos da radiação. Ali se vê o fenômeno de pré-aceleração em que o elétron começa a se mover antes mesmo de uma força externa agir sobre ele. A resolução deste paradoxo vem da mecânica quântica quando se leva conta que tais fenômenos são indistinguíveis da relação de incerteza entre momento e posição. Talvez algo análogo esteja acontecendo aqui, mas, infelizmente, na falta de uma teoria quântica de gravitação podemos apenas especular.

2.3 O Big Bang

Podemos inverter o raciocínio do teorema da singularidade, nos perguntando o que acontece se θ for positivo em algum instante θ_i . Usando a desigualdade (2.19), vemos que a equação de Raychaudhuri implica o oposto: que $\theta \rightarrow \infty$ em algum ponto a tempo próprio finito no passado. Dito de outra forma, para uma distribuição de matéria-energia que satisfaça a condição forte de energia (2.18), **todas as geodésicas tipo-tempo existem há apenas um tempo finito!** Isto quer dizer que em algum ponto finito do passado medido por qualquer referencial inercial, o fator de escala $a(t)$ tendia a zero. Antes daquele ponto não podemos falar em observáveis independentes. A “explosão” que se seguiu é chamada de “Big Bang”.

A verificação experimental por E. Hubble que $\theta > 0$, ou seja, o universo está em expansão, marcou não apenas uma verificação experimental da Relatividade Geral como também a migração da Cosmologia dos estudos teológicos para os estudos científicos. Pela primeira vez um modelo sobre a criação do universo que conhecemos poderia ser testado experimentalmente. Não é o escopo destas notas cobrir a discussão que se seguiu, em ambas as frentes teológicas e físicas, sobre a existência de um “momento de criação”. É suficiente dizer, a este ponto, que a

questão sobre se o Big Bang representa a gênese de nosso universo está respondida ao menos desde a descoberta da Radiação Cosmológica de Fundo, que iremos tratar na próxima aula.

Vamos aproveitar esta discussão para tecer comentários gerais sobre a estrutura causal do universo. Por estrutura causal entendemos, por exemplo, a determinação de quais pontos estão no passado de um ponto dado, ou seja, qual é o **passado causal** de um dado ponto. Começemos da métrica FRW para seções espaciais euclidianas:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.21)$$

Podemos, ao invés de tratar com o tempo cosmológico t , introduzir uma nova coordenada temporal η , em termos da qual a métrica será dada por:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (2.22)$$

Fica óbvio então que a relação entre t e η é dada por:

$$d\eta = \pm \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.23)$$

onde o sinal é costumeiramente escolhido de forma ao aumento de η representar o futuro.

A utilidade em se escrever a métrica como (2.22) está no ponto que a multiplicação do elemento de linha pela função $a(\eta)$ não altera os cones de luz. De fato, os cones de luz de (2.22) viajam por linhas em que $ds^2 = 0$, e podem assim ser calculados na métrica:

$$d\tilde{s}^2 = -d\eta^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.24)$$

Esta métrica por outro lado, é a boa e velha métrica de Minkowski, cujos cones de luz são bem conhecidos (cf. Figura 2). Transportando então os cones de luz para a métrica (2.22), saberemos qual é a estrutura causal da métrica FRW em questão. A relação que liga ds^2 a $d\tilde{s}^2$ é chamada de **transformação conforme** e η é correspondentemente chamado de **tempo conforme**. O argumento se aplica da mesma forma para seções espaciais hiperbólicas e esféricas, com certas peculiaridades neste último caso que, infelizmente não teremos tempo de cobrir.

Pelo que vimos acima, a estrutura causal parece estar determinada para o caso (2.21). Contudo, há uma sutileza a esclarecer: A transformação (2.23) é ou não bem definida? O passo primeiro parece ser integrar a equação:

$$\eta = \int^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.25)$$

E testar sua convergência. Tudo parece certo se $a(t)$ não se anular. Mas, se a integral acima divergir a $\pm\infty$ para algum valor de t no qual $a(t) \rightarrow 0$, então η poderá tomar qualquer valor real, e neste caso a métrica (2.22) será conforme a *todo* o espaço-tempo de Minkowski. Se, por outro lado, a integral convergir para um valor η_0 mesmo se $a(t) \rightarrow 0$ a métrica será conforme a *uma parte* do espaço de Minkowski, e neste caso sua estrutura causal será mais interessante.

Vamos tratar de um exemplo concreto. Tome $a(t) \propto t^\alpha$, com α uma constante. Neste caso temos um ponto em que $a(t) \rightarrow 0$, mas o que acontecerá com a estrutura causal do espaço-tempo? Introduzamos o tempo conforme η , integrando (2.25):

$$\eta = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (2.26)$$

Note que o ponto problemático é $t \rightarrow 0$. Se $\alpha \geq 0$, então $a(t) \rightarrow 0$ neste ponto. Se $\alpha > 1$, η divergirá, então a estrutura causal será equivalente ao do espaço-tempo de Minkowski. O que aparentava ser um problema, o ponto onde $a(t)$ se anulava, pode ser visto como apenas um artefato introduzido pelo sistema de coordenadas que escolhemos, que traz um ponto no passado distante $\eta = -\infty$, para $t = 0$. Tal ponto não corresponde a uma singularidade física, como o Big Bang.

Se $\alpha < 1$, contudo, η convergirá para $\eta = 0$, e assim (2.22) estará definido apenas para $\eta \geq 0$. A estrutura causal será então a do espaço-tempo de Minkowski com a parte $\eta < 0$ cortado. A linha $\eta = 0$ é chamada de **fronteira conforme** do espaço-tempo. Note que se dois pontos estiverem suficientemente próximos de $\eta = 0$, não haverá qualquer relação causal entre eles. Ambas as situações $\alpha > 1$ e $\alpha < 1$ estão mostradas na Figura 7.

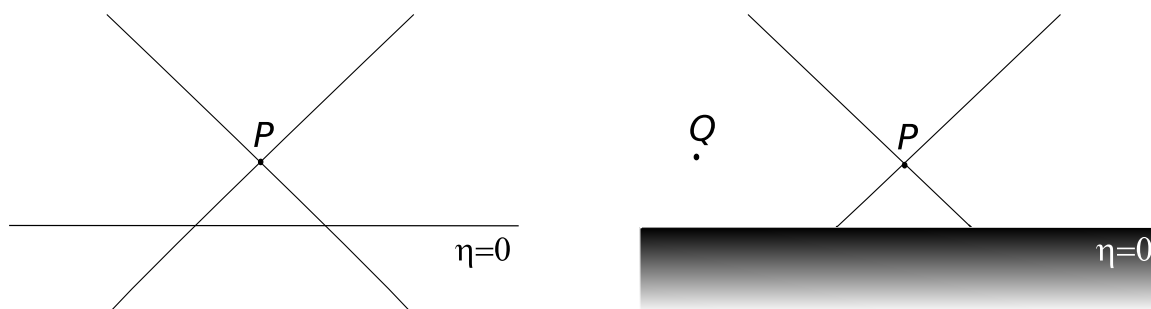


Figura 7: A estrutura causal dos universos com métrica do tipo FRW e seção espacial euclidiana para $a(t) \propto t^\alpha$. O caso $\alpha > 1$ e $\alpha < 1$ estão, respectivamente, à esquerda e à direita acima. À esquerda, podemos estender o cone de luz sem problema algum além de $\eta = 0$, enquanto isto não é possível para $\alpha < 1$. Note também que não há nenhuma relação causal entre P e Q à direita.

Problemas

1. Esboce a estrutura causal da métrica de FRW (2.21) quando $a(t) = t$.
2. O que acontece com a integral (2.25) quando $t \rightarrow \infty$? Para quais valores de α ela converge? Ela converge para $\theta(t)$ constante?

3 Terceira Aula

Nesta última aula falaremos dos testes, das hipóteses e dos problemas do modelo padrão da Cosmologia.

3.1 Homogeneidade e Isotropia do Universo

A pergunta que se põe, face aos estudos da última aula é *quão correta está a solução de FRW (2.8) na descrição do universo observável?* A pergunta é de fato muito pertinente já que a pequena parte do universo que conseguimos ver à noite não parece em nada isotrópica e muito menos homogênea.

Tal como um gás ideal em uma caixa, também neste caso a noção de homogeneidade e isotropia é um efeito das “amostras” que tomamos. Para uma pessoa sobre a Terra, que olhe uma região de 1 pc^3 , o universo de fato não aparentar ser nem homogêneo nem isotrópico, assim como uma pessoa que olhe uma pequena região em uma caixa, digamos um cubo com

10 nm de lado, um gás não será de forma alguma homogêneo. Da mesma forma, a partir de distâncias da ordem de 100 Mpc⁵, nota-se que o universo é bastante homogêneo, fato que foi exaustivamente testado tanto com base no que podemos ver do espectro visível quanto ondas de rádio e raios X, como ilustrado na Figura 8. Curiosamente a razão entre as distâncias planetárias $\approx 0,1$ pc e as cosmológicas ≈ 100 Mpc é a mesma que as distâncias atômicas ≈ 1 nm e as distâncias mundanas ≈ 1 m.

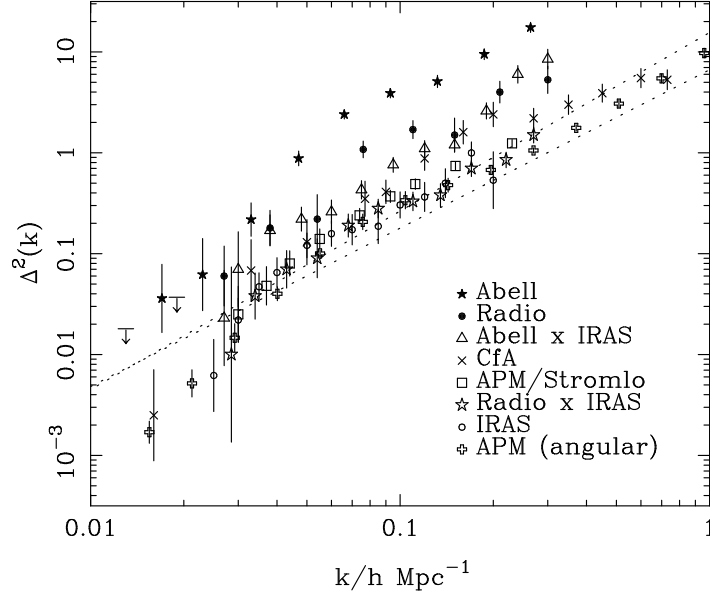


Figura 8: Uma distribuição do quadrado da flutuação da densidade dos objetos visíveis com o inverso da distância, segundo vários experimentos. De acordo com o gráfico, as flutuações são de menos de 1 por cento à distância de 100 Mpc. Gráfico por Peacock e Dodds, [9].

Podemos assim, justificar nossa suposição de que o universo é homogêneo e isotrópico e então usar a métrica FRW (2.8) para fazer previsões sobre cosmologia. Uma das conclusões que tiramos da noção de isotropia e homogeneidade foi a de que a ação da matéria na geometria do universo, ao menos nas escalas cosmológicas, é bem aproximada pelo tensor de energia-momento de um fluido perfeito (2.10):

$$T_{ab} = \rho \xi_a \xi_b + P(g_{ab} + \xi_a \xi_b). \quad (3.1)$$

Podemos perguntar a este momento, o que sabemos sobre a pressão e a densidade de energia da matéria observável. Para sistemas em **equilíbrio termodinâmico**, sabemos que os dois estão relacionados por uma equação de estado. Por exemplo, para um gás ideal monoatômico, $\rho = \frac{E}{V} = \frac{3}{2}P$, para um gás de fótons (**radiação**), $\rho = 3P$. Para partículas de **poeira**, $P = 0$ e assim por diante. Normalmente esta relação é colocada da seguinte forma:

$$P = w\rho \quad (3.2)$$

Com w constante.

Conforme vimos na aula anterior, a requisição de que o tensor energia-momento seja conservado $\nabla^a T_{ab} = 0$ implica em muitas restrições para a evolução temporal de ρ e P . De fato usando a equação (2.3) para a derivada de ξ^a :

$$\nabla_a \xi^b = \theta(\delta_a^b + \xi_a \xi^b), \quad (3.3)$$

⁵1 Mpc, ou 1 megaparsec, é equivalente a 3×10^{21} m.

podemos aplicar a condição de conservação, como se fez no Exercício 3 da seção 2.1. O resultado será:

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \implies (\dot{\rho} + 3\theta(P + \rho))\xi_b = 0 \quad (3.4)$$

usando $P = w\rho$ e $\theta = \dot{a}/a$, isto nos dá uma equação diferencial simples para ρ :

$$\dot{\rho} + 3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0 \implies \rho a^{3(1+w)} = \text{constante!} \quad (3.5)$$

Antes de mais nada, a solução acima faz sentido, já que a lei de conservação para partículas de poeira nos diz que a energia desta configuração deve ser constante à medida que o volume do espaço $\propto a^3$ aumente. Da mesma forma, ao aplicarmos (3.5) para um gás ideal, vemos que podemos pensar na evolução do universo como um processo isentrópico. Note também que a condição forte de energia (2.18) requer que a pressão não seja muito negativa:

$$w > -\frac{1}{3}. \quad (3.6)$$

A equação para evolução da densidade de energia (3.5) tem também outra consequência importantíssima. Como a densidade de energia cai com diferentes taxas à medida que o universo se expande, teremos, exceto em alguns pontos de inflexão, **sempre uma forma de energia dominante**. Na presente época do universo, essa forma de energia é a poeira. De fato, o tensor de energia-momento para o universo presentemente é muito bem aproximado por $T_{ab} = \rho\xi_a\xi_b$. Nas fases iniciais do universo, este papel era cumprido pela radiação, cuja densidade de energia cai mais rapidamente que poeira:

$$\rho \propto \frac{1}{a^4}, \text{ (radiação);} \quad \rho \propto \frac{1}{a^3}, \text{ (poeira)}. \quad (3.7)$$

Segundo medidas recentes, este “ponto de inflexão”, em que as contribuições de poeira para a energia do universo ultrapassou a energia devido à radiação quando o fator de escala do universo era cerca de 1000 vezes menor do que é hoje. Note também que ambas eram muito maiores no início do universo que na época presente. O termo “Big Bang Quente” parece acurado para descrever o estado inicial do universo.

3.2 O Desvio para o Vermelho

De imensa importância histórica foi a predição, pelas equações de Einstein, que o fator de escala do universo $a(t)$ realmente variava com o tempo. Isto demoliu por completo a noção de espaço absoluto que reinava até então, e lançou as bases da Cosmologia moderna. Esta expansão é diretamente vista pelo efeito Doppler da luz emitida por galáxias distantes, medido pela primeira vez por E. Hubble em 1929. Disto iremos nos ocupar nesta seção.

Começemos com ótica geométrica. Um raio de luz pode, nesta aproximação, ser entendido como uma trajetória no espaço-tempo do tipo nulo, isto é, $ds^2 = 0$ por toda a trajetória. Seja k^a o vetor tangente a esta trajetória. A componente temporal deste vetor é a sua **frequência** ω , ou, mais geralmente,

$$\omega = -k^a u_a, \quad (3.8)$$

onde u^a é o vetor tangente ao observador que mede a frequência da luz. Note que $u^a u_a = -1$.

Para um observador que segue o “tempo cosmológico” t , seu vetor tangente é $u^a = \xi^a$, e a métrica é (2.8):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\Sigma_{0,\pm}^2. \quad (3.9)$$

Imagine então que o raio de luz foi lançado com frequência ω_1 por um observador a um tempo cosmológico t_1 . Neste caso, sabemos qual é a componente k^0 do raio de luz. Porém, como k^a é nulo, sabemos também sua projeção espacial, pois:

$$g_{ab}k^ak^b = -\omega_1^2 + h_{ab}k^ak^b = -\omega_1^2 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}|_{t=t_1} = 0 \quad (3.10)$$

e \mathbf{k} é o vetor de onda tridimensional. Assim, podemos reescrever

$$\omega_1 = -k^au_a = k_a \left[\frac{\eta^a}{\sqrt{\eta_b\eta^b}} \right]_{t=t_1} \quad (3.11)$$

onde η_a é um vetor tipo espaço, que aponta na direção do vetor de onda \mathbf{k} do raio de luz. Note que introduzimos explicitamente a condição de que η^a , assim como u^a acima, deve ser propriamente normalizado.

Contudo, como o espaço é isotrópico e homogêneo, o único efeito sobre a evolução de η^a será a sua expansão, como podemos ver da métrica FRW (2.8). Desta forma, podemos relacionar a dilatação de η^a com os fatores de escala em tempos diferentes:

$$\frac{\left[\sqrt{\eta_b\eta^b} \right]_{t=t_1}}{\left[\sqrt{\eta_b\eta^b} \right]_{t=t_2}} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \quad (3.12)$$

Combinando as duas equações, saberemos com qual frequência um observador medirá o raio de luz a tempo cosmológico t_2 :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \quad (3.13)$$

E o **fator de desvio para o vermelho** será:

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} - 1, \quad (3.14)$$

donde, expandindo em série de Taylor, obtemos a **Lei de Hubble**:

$$z \approx (t_2 - t_1)\dot{a} \approx R \frac{\dot{a}}{a} = HR. \quad (3.15)$$

Nesta equação, R é a distância entre dois pontos próximos, dada aproximadamente por $a(t_2 - t_1)$ e H é conhecido comumente por **Constante de Hubble**. Porém, como vimos, $H = \theta$, o nosso fator de expansão, não é constante. Vamos de qualquer forma manter a tradição e a terminologia chamando H assim. O valor de H é, presentemente, segundo medições do satélite [WMAP](#):

$$H = 71 \pm 4 \text{ (km/s)/Mpc} \quad (3.16)$$

3.3 A Evolução do Nosso Universo

A aplicação das Equações de Einstein para as métricas do tipo FRW (2.8) têm uma importância histórica, além de servir de base para explicar algumas definições em cosmologia. Infelizmente, para fazê-lo vamos ter de nos demorar mais um pouco no cálculo do tensor de Ricci. Usaremos o resultado do Problema 4 da seção 1.4 (1.37):

$$R_{abc}{}^d = \partial_b \Gamma^d{}_{ac} - \partial_a \Gamma^d{}_{bc} + \Gamma_{ac}^e \Gamma^d{}_{eb} - \Gamma_{bc}^e \Gamma^d{}_{ea}. \quad (3.17)$$

Para calcular o tensor de Ricci, temos primeiro que calcular os símbolos de Christoffel da métrica (2.8). A maneira mais direta de fazê-lo é notar que podemos dividir os índices naturalmente entre o tempo t , e as direções espaciais i, j, k . Desta forma podemos fazer uso do fato que a única dependência da métrica com t é via o fator de escala:

$$\partial_t(g_{ij}) = 2\frac{\dot{a}}{a}g_{ij} = 2\theta g_{ij}. \quad (3.18)$$

Desta forma teremos 8 opções para os símbolos de Christoffel, facilmente calculadas a partir de (1.18):

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tt} = \Gamma^t_{ti} = \Gamma^t_{it} = 0, \quad \Gamma^i_{tj} = \Gamma^i_{jt} = \theta\delta^i_j, \\ \Gamma^t_{ij} = \Gamma^t_{ji} = \theta g_{ij}, \quad \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} = \bar{\Gamma}^i_{jk}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Onde $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ é o símbolo de Christoffel associado com a métrica espacial h_{ab} . Sua forma explícita não será necessária, mas usaremos o fato que ela terá curvatura constante (cf. a seção 2.1 e (2.7)).

Usando a equação acima para o tensor de Ricci (1.37), vemos as componentes não-nulas são:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -3(\dot{\theta} + \theta^2), \\ R_{ij} &= \bar{R}_{ij} + (\dot{\theta} + 3\theta^2)g_{ij}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde \bar{R}_{ij} é o tensor de Ricci associado com $\bar{\Gamma}^i_{jk}$. Note que R_{tt} é exatamente $\xi^a R_{ab} \xi^b$ calculado na aula anterior (2.16). Podemos então escrever diretamente as equações de Einstein:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P) \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} &= 4\pi G_N(\rho - P) \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde k é uma constante, $+1$ para seção espacial esférica, -1 para seção espacial hiperbólica e 0 para seção espacial euclideana. A segunda equação é costumeiramente apresentada como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho \quad (3.22)$$

e o sistema é conhecido como **Equações de Friedmann**.

A partir da equação (3.22) e da equação de estado (3.2),

$$P = w\rho, \quad (3.23)$$

podemos achar diretamente o fator de escala por quadratura. Vimos no início desta aula (3.5) que conservação do tensor de energia-momento leva à conservação da quantidade

$$\rho(t)a^{3(1+w)}(t) = \rho(t_0)a^{3(1+w)}(t_0). \quad (3.24)$$

Então nossa equação diferencial será do do tipo

$$\dot{a}^2 - Ca^{-(1+3w)} + k = 0, \quad (3.25)$$

cujas soluções dependem dramaticamente do sinal de k , ou seja, do fato das seções espaciais serem esféricas, euclidianas ou hiperbólicas. Na Figura 9 pode-se ver o gráfico de $a(t)$ para diferentes valores de k e $w = 0$, embora o gráfico não seja qualitativamente diferente para radiação ou outras formas de matéria que satisfazem a condição forte de energia (2.18).

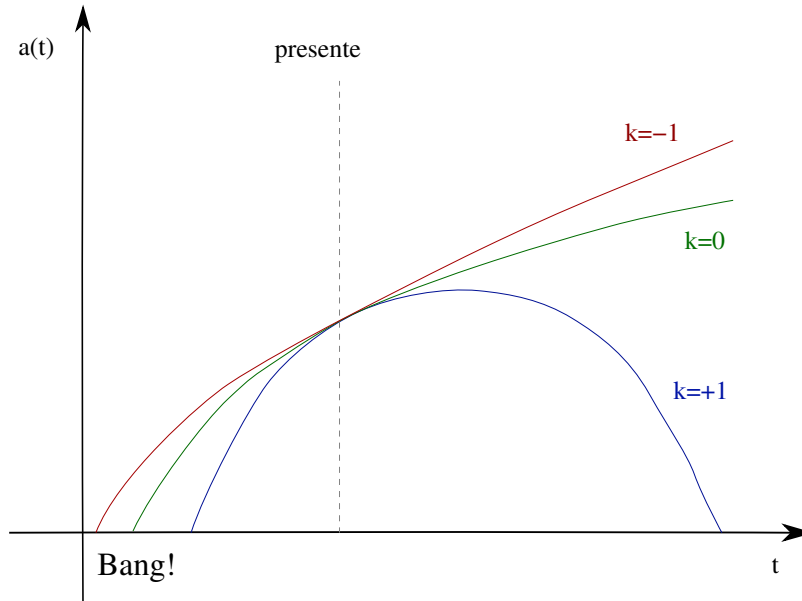


Figura 9: Três opções para o nosso universo, segundo (3.25) para $w = 0$ (poeira). Se $k = +1$, ou seja, a seção espacial do universo for esférica, o universo colapsará em algum momento do futuro. Se $k = 0$ ou $k = -1$, ele se expandirá indefinidamente. Gráfico inspirado por [5].

Com base no resultado para as equações de Friedmann esboçados na Figura 9, torna-se interessante definir um parâmetro que possa ser medido diretamente e nos diga se o universo se colapsará ou não. Para isso vamos reescrever a equação (3.22) como:

$$\frac{k}{\dot{a}^2} = \frac{8\pi G_N}{3\theta^2} \rho - 1 \equiv \Omega - 1 \quad (3.26)$$

onde introduzimos o **parâmetro de densidade**:

$$\Omega = \frac{8\pi G_N}{3\theta^2} \rho \quad (3.27)$$

que, se for maior que 1, nos dirá que a matéria do universo é suficiente para colapsá-lo em um “Big Crunch”.

Supreendentemente, a mais recente medição de Ω (pelo satélite [WMAP](#), veja [10] para detalhes) nos dá:

$$\Omega = 1,02 \pm 0,02, \quad (3.28)$$

ou seja, a seção espacial do universo atual é basicamente euclideana, ou **plana**. Vamos discutir este resultado e suas implicações mais abaixo.

3.4 Radiação Cosmológica de Fundo

Conforme dissemos nos nossos estudos sobre a evolução do universo, diferentes épocas do universo têm sempre uma forma de energia dominante. No universo atual, ao menos até recentemente, este papel é desempenhado pela “poeira”, que não tem pressão P . Isto é condizente com o que conhecemos do universo em escalas planetárias: estrelas esparsamente distribuídas que não tem como interagir com suas vizinhas. O universo se encontra no que chamamos de **era dominada pela matéria**.

Vimos (3.5) que a densidade de energia devida à radiação ($w = 1/3$) decai mais rapidamente que a densidade de energia da matéria ($w = 0$). De fato, a razão entre as duas deve obedecer uma dependência simples com o fator de escala:

$$\frac{\rho_e}{\rho_m} \propto \frac{1}{a(t)} \quad (3.29)$$

Se seguirmos o raciocínio inverso, nos daremos conta que em algum momento a energia dominante era de fato a radiação. O universo estava no que chamamos de **era dominada pela radiação**. Esta era tem de fato uma consequência observável mesmo nos dias de hoje. Ocorre que naquela época em que o fator de escala era pequeno o suficiente, a radiação interagiu bastante com a matéria, de forma que o universo era *opaco*. Segundo [10], isto aconteceu quando

$$\frac{a(t_{\text{hoje}})}{a(t_{\text{igualdade}})} = 3455^{+385}_{-392}. \quad (3.30)$$

É de se esperar, então, que em algum instante depois dessa igualdade, a matéria ficou esparsa o suficiente para que a radiação efetivamente deixasse de interagir com ela. Este ponto é conhecido como **superfície de último espalhamento**, e aconteceu quando

$$\frac{a(t_{\text{hoje}})}{a(t_{\text{espalhamento}})} \approx 1000 \quad (3.31)$$

Desde então esta radiação expandiu e esfriou. Isto hoje é visto como um espectro de corpo negro a $T \approx 2,725$ K, extremamente homogêneo e isotrópico. Esta radiação, conhecida por **Radiação Cosmológica de Fundo**, foi observada pela primeira vez por Penzias e Wilson em 1965 e marcou a primeira verificação experimental da teoria do “Big Bang Quente”. O estudo detalhado desta radiação tem sido de extrema importância no estabelecimento da Cosmologia de precisão, e vai continuar a revolucionar nossa visão sobre o universo por ainda décadas.

3.5 Inflação. Fronteiras

O retrato que descrevemos até aqui compreende o que é chamado de **Modelo Padrão da Cosmologia**. Apesar de extremamente exitoso para descrever aspectos gerais do universo, o modelo como se apresenta não consegue prever detalhes sobre sua evolução. Vamos, nesta seção final, tentar apresentar seus problemas e descrever as modificações mais prováveis para que se inclua alguns dos dados experimentais.

Note que, quando apresentamos o valor da temperatura da radiação cosmológica de fundo, a fizemos com três casas decimais. Isto se deve ao fato desta radiação ser efetivamente muito homogênea, com flutuações da ordem de 10^{-5} . Este é o “corpo negro” mais uniforme que se tem notícia. As flutuações, por outro lado, foram detectadas na década de 1970 e são impressionantemente constantes com a variação da frequência. Esta invariância é tão pequena que põe em dúvida a hipótese que assumimos que a matéria-energia do universo estava em equilíbrio termodinâmico. De fato, pela mecânica estatística, esperaria-se uma forte dependência das flutuações do número de fótons por frequência:

$$\frac{\Delta n(\omega)}{n(\omega)} \approx \frac{(kT)^3}{(\hbar\omega)^3} \quad (3.32)$$

Porém o que se observa é uma flutuação praticamente *independente* da frequência. Duas hipóteses são naturais a este ponto: ou o universo estava em algum estado especial no instante

da última superfície de espalhamento, ou houve algum processo que resultou na uniformização abrupta dessas flutuações.

Cada uma das hipóteses tem argumentos extremamente fortes ao seu favor, e a questão está longe de ser respondida. Uma corrente de pensamento diz, em suma, que sabemos muito pouco sobre o espaço de fase de teorias com gravitação para falar de “estatística natural” [11]. Outra corrente de pensamento, mais pragmática, supõe que o universo passou por alguma fase de sua evolução em que o fator de escala crescia tão rapidamente que não haveria mecanismo que pudesse “termalizar” as flutuações. Tal mecanismo é chamado de **inflação cosmológica**, e foi proposto independentemente por Starobinski, Vilenkin, Guth e Linde [12] para explicar alguns fatos curiosos sobre o universo, os quais listamos.

- *As seções espaciais do universo são muito planas.* Segundo vimos acima, $\Omega \approx 1$, pelo menos por uma parte em 50. Seria desejável imaginar algum mecanismo de evolução do universo em que Ω fosse próximo a 1 naturalmente, ao invés de simplesmente postular este fato. A teoria inflacionária explica-nos que isto se deve ao fato de todas as curvaturas espaciais terem se reduzido durante a fase que $a(t)$ crescia rapidamente. Este problema é conhecido como problema da platitude.
- *O universo é muito homogêneo.* Como vimos, a noção básica que a matéria do universo está em equilíbrio termodinâmico requer que haja interação entre suas diversas partes. O problema é que, segundo as recentes medições da constante de Hubble, sabemos que o universo tem menos de

$$t \approx \frac{1}{H} \approx (13,4 \pm 0,3) \times 10^9 \text{ anos.} \quad (3.33)$$

Este tempo é menor que o necessário para que um raio de luz trafegue de um extremo a outro do universo visível, e desta forma, nenhuma interação pode ter surgido entre tais partes. Não é natural, então, que encontremos tais extremos em *exatamente* o mesmo estado, mesma composição de matéria, mesma temperatura. A teoria inflacionária nos diz aqui que, como o universo passou por este período de expansão rápida, pontos aparentemente muito distantes do cosmo hoje em dia tiveram de fato algum tipo de contato no passado. Este é conhecido como **problema do horizonte**.

- *Não se sabe qual o mecanismo que forneceu flutuações de densidade fortes o bastante para a criação das estruturas de galáxias que vemos hoje.* Este mecanismo deve ser de fato, independente da frequência como o que a teoria inflacionária nos dá. Nenhum outro modelo tem uma resposta satisfatória a este problema.

O problema principal da teoria inflacionária é a natureza do mecanismo que geraria uma expansão tão acelerada assim. Para resolver os problemas acima, teríamos que ter um período em que $a(t)$ crescesse mais rápido que t , o que em nossas convenções significaria que um raio de luz não poderia cobrir a distância espacial entre dois pontos distintos. Façamos então $a(t) \propto t^\alpha$, com $\alpha > 1$. Então o fator de expansão será:

$$\theta = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\alpha}{t}, \quad \alpha > 1 \quad (3.34)$$

Então a equação de Raychaudhuri nos daria:

$$\dot{\theta} + \theta^2 = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{t^2} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3P) \quad (3.35)$$

Ou seja $\rho + 3P < 0$ e a matéria responsável pelo mecanismo de inflação **violaria a condição forte de energia**. Não se conhece nenhuma forma de matéria em equilíbrio que viola esta condição. Se houvesse tal matéria, ela teria uma equação de estado do tipo (3.6), com $w < -1/3$. Pode-se contornar este problema ao supor-se que a matéria em questão se encontra em um estado especial, mas aqui não se resolve efetivamente o problema que a inflação cosmológica se propõe. Como dissemos acima, a inflação cosmológica foi proposta como um mecanismo que explica o estado especial do universo. Ao supormos que o estado do universo era especial ao princípio, esvaziamos suas conclusões.

Há contudo, uma situação em teoria quântica de campos em que (3.6) é violada. Como podemos ver em fenômenos críticos, podemos ter instabilidades coletivas, como por exemplo o superresfriamento, em que a energia do sistema pode ser pensada como estando em um máximo local. A maneira covariante de dizer isso em teoria de campos é dizer que o tensor momento-energia será dado por

$$T_{ab} = -\lambda g_{ab} \quad (3.36)$$

Onde $\lambda > 0$ pode ser pensada como a energia do estado instável, acompanhada de uma pressão negativa. De fato, quando derivamos a equação de Einstein, nos baseamos na conservação do tensor $R_{ab} - 1/2g_{ab}R$, mas omitimos que o tensor Λg_{ab} também é conservado se Λ for constante. Desta forma, poderíamos ter dito que a equação de Einstein mais geral é

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R + \Lambda g_{ab} = 8\pi G_N T_{ab}. \quad (3.37)$$

Λ é conhecido como **constante cosmológica**, e foi proposta pela primeira vez por Einstein na tentativa de criar um modelo do universo que fosse estático. Infelizmente este modelo era instável, e assim não era realista, e a introdução da constante cosmológica, vista como supérflua, não teve impacto na criação do modelo padrão de cosmologia.

Para efeitos de mecanismos de inflação, contudo, a equação (3.36) parece funcionar pois nele $\rho = -P$, e assim $w = -1$ e a condição forte de energia é violada. Porém o modelo foi abandonado, pelo fato de, assim como no exemplo de superresfriamento, a relaxação do universo se daria de maneira tão violenta que toda as flutuações criadas segundo a regra de independência da frequência seriam afetadas. Este problema é conhecido como o da **saída graciosa**. Até hoje não se encontrou um mecanismo fidedigno para a inflação cosmológica, que responda a mais questões que crie.

De qualquer forma, mesmo com um mecanismo de inflação aceitável, teríamos vários problemas para explicar a composição *atual* do universo. O satélite **WMAP** mediu não só o parâmetro de densidade atual do universo, como também discriminou as contribuições vindas de diferentes tipos de energia. Acha-se os seguintes parâmetros de densidade para a matéria:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{bariônica}} &= 0,047 \pm 0,006, \\ \Omega_{\text{matéria}} &= 0,29 \pm 0,07. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Este é um resultado surpreendente. Toda matéria que conhecemos é bariônica, formada por prótons e nêutrons. No entanto, vemos que ela compreende apenas um sexto de toda a matéria do universo. O restante é um tipo de matéria não prevista pelo modelo padrão de física de partículas. O impacto é ainda maior quando lembramos que o modelo de partículas é exaustivamente testado e tem tido sucesso em todos os experimentos em aceleradores. Em escala cósmica, contudo, falha ao prever a existência desta **matéria escura** que compõe a maior parte do universo conhecido⁶. O estudo das propriedades da matéria escura parece ser

⁶Também se acredita que a matéria escura seja responsável pela relação de Tully-Fishler que determina a

o caminho mais promissor para o estudo da física de partículas além do modelo padrão. Veja [14] para detalhes.

Outra verificação, não menos bombástica, é que a *maior parte da energia do universo é de uma forma completamente desconhecida por nós*:

$$\Omega_{\text{outras formas}} \approx 0,70. \quad (3.39)$$

No artigo [10], há também uma predição sobre a equação de estado desta forma de energia, chamada de **energia escura**:

$$P = w\rho, \quad w < -0,78. \quad (3.40)$$

Ou seja, tal energia viola a condição forte de energia. Pelo que vimos na discussão sobre inflação, isto significa que $a(t) \propto t^\alpha$, com $\alpha > 1$. Ao estudarmos a estrutura causal da métrica

$$ds^2 = -dt^2 + t^{2\alpha}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.41)$$

como fizemos na seção 2.3, vemos que a integral do tempo conforme (2.23) converge para $t \rightarrow \infty$:

$$\eta(t) = \int^t \frac{dt'}{a(t')} = -\frac{t^{1-\alpha}}{\alpha-1} \quad (3.42)$$

e entraremos, assim em um novo período inflacionário, onde perderemos contato causal com os vizinhos (Veja figura 10). Sinais vindos das nossas vizinhanças terão um desvio para o vermelho cada vez maior até que depois de um ponto não será mais possível observá-los. Tal limite nos eventos que podemos ver é chamado de **horizonte cosmológico** e parece ser nosso destino, se as conclusões do WMAP forem verificadas.

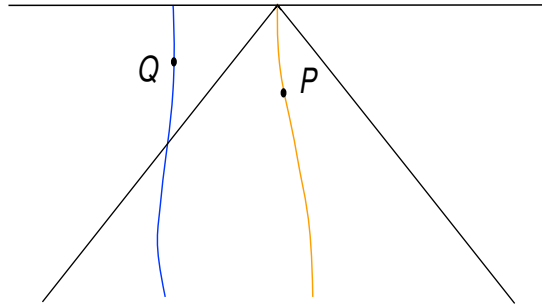


Figura 10: A estrutura causal do universo no futuro. Veja que após um certo tempo, os observadores que seguem as duas linhas-mundo perderão contato. Por exemplo, o observador que passa por P não verá o evento Q .

Ao contrário da matéria escura, contudo, temos um candidato natural para a energia escura, que é a constante cosmológica introduzida acima. Como dissemos, ali temos $\rho = -P$ e assim $w = -1$ não satisfaz a condição forte da energia, e assim geraria o efeito de energia escura verificado pelo WMAP. Note, contudo, que este mecanismo é diferente do mecanismo de inflação, pois se aplica a evolução final do universo. Desta forma evitamos o problema da

constância da velocidade aureolar de estrelas nas periferias das galáxias espirais. Neste caso há também uma relação fenomenológica proposta [13] que modifica a Segunda Lei de Newton. Ela é conhecida como MOND (M^Odified Newtonian Dynamics).

saída graciosa. O valor de Λ para que tal termo seja responsável pela matéria escura é muito pequeno:

$$\Lambda \approx 10^{-38} \text{ Kg/m}^3 \quad (3.43)$$

e não teria efeito observável durante o processo inflacionário. Seria contudo, extremamente anti-natural ter uma constante pequena desta forma. Qualquer que fosse o mecanismo que prevesse este resultado para Λ ele teria que ser preciso em uma parte em 10^{120} para que se passasse das energias naturais durante a criação do universo (da ordem da energia de Planck), para valores de Λ como o acima. Este é o chamado **problema da sintonia fina** em cosmologia.

Qualquer que seja o seu mecanismo, a detecção da energia escura nos põe com outro problema inesperado. Note que mesmo sendo maior, a contribuição da energia do universo dada pela matéria ($\approx 30\%$) é comparável àquela dada pela energia escura ($\approx 70\%$). Segundo (3.5), sabemos que a evolução da densidade de energia depende de sua equação de estado:

$$\rho a^{3(1+w)} = \text{constante}. \quad (3.44)$$

Parece uma coincidência incrível que vivemos em uma época em que duas formas de energia distintas, com w s distintos, são comparáveis. Este é chamado de **problema da coincidência**.

Vê-se dessa forma que a Cosmologia nos apresenta com formidáveis desafios que irão, com certeza, modificar nossa visão sobre a Natureza. Aqui listamos apenas alguns, que consideramos mais importantes. Podemos dizer sem medo de pretensão que a compreensão destes resultados experimentais é, hoje, o problema mais importante da física teórica.

Referências

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, Inc (1972).
- [2] Jean-Philippe Uzan, *The fundamental constants and their variation: observational status and theoretical motivations*, Rev. Mod. Phys. 75 (2003) 403, [[arXiv:hep-ph/0205340](#)].
- [3] L. Landau e E. Lifshitz, *Curso de Física Teórica, Vol. 2: Teoria do Campo*, Editora Mir, (1980);
- [4] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [5] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, [[arXiv:gr-qc/9712019](#)], ou *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley, (2003).
- [6] S. Hawking e G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [7] Veja o capítulo 6 de R. M. Wald, *op. cit.* para uma discussão sobre o trabalho de Chandrasekhar. Para um estudo aprofundado, veja o capítulo 11 de S. Weinberg, *op. cit.*
- [8] S. Hawking, *Information Loss in Black Holes*, Phys. Rev. D **72**, 084013 (2005), [[arXiv:hep-th/0507171](#)].
- [9] J. A. Peacock e S. J. Dodds, *Reconstructing the linear power spectrum of cosmological mass fluctuations*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **267**, 1020 (1994) [[arXiv.org:astro-ph/9311057](#)].

- [10] D. N. Spergel *et al.* [WMAP Collaboration], *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003) [[arXiv:astro-ph/0302209](#)].
- [11] S. Hollands and R. M. Wald, *An alternative to inflation*, *Gen. Rel. Grav.* **34** (2002) 2043 [[arXiv:gr-qc/0205058](#)].
- [12] A. H. Guth, *The Inflationary Universe: A Possible Solution To The Horizon And Flatness Problems*, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981); A. D. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems*, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982).
- [13] M. Milgrom, *MOND—a pedagogical review*, *Acta Phys. Polon. B* **32**, 3613 (2001) [[arXiv:astro-ph/0112069](#)].
- [14] G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, *Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints*, *Phys. Rept.* **405**, 279 (2005) [[arXiv:hep-ph/0404175](#)].