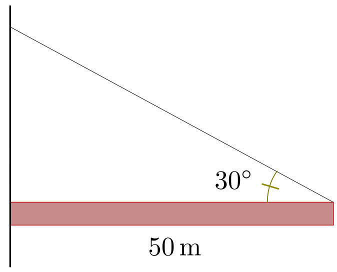
Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Física L2 – Prova de Segunda Chamada – 09 de outubro de 2006

Gabarito.

Problema 1: Um projeto de ponte de suspensão está esquematizado abaixo. A densidade linear do concreto usado na pista com largura de 10 m é de $\mu = 500\,\mathrm{kg/m}$. A pista tem comprimento de 50 m e o ângulo é de 30°.



(a) Calcule a tensão no fio.

Resposta: A tensão tem de ser o suficiente para cancelar o torque causado pelo peso. Este último pode ser considerado como atuando no centro da barra. Assim:

$$TL \operatorname{sen} 30° = mg\frac{L}{2} \Longrightarrow T = mg = \boxed{\mu g L = 2{,}5 \times 10^5\,\mathrm{N}.} \tag{1}$$

(b) Calcule a frequência fundamental de ondas transversais estacionárias na pista.

Resposta: Aplicando a fórmula:

$$v_s = \sqrt{\frac{T\cos 30°}{\mu}} = \sqrt{gL\cos 30°}.$$

Como a ponte tem uma extremidade fixa e a outra livre, o menor comprimento de onda estacionária será $\lambda = 4L$. A frequência fundamental ν é então

$$\nu = \frac{v}{4L} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{L}\cos 30°} = \boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{4\sqrt{10}}\,\mathrm{Hz} = 0{,}104\,\mathrm{Hz}} \tag{2}$$

Problema 2: Em uma piscina de profundidade constante as ondas de água possuem a seguinte relação de dispersão:

$$\omega^2 = gh\,k^2 \tag{3}$$

A piscina tem forma retangular com um dos lados duas vezes maior que o outro $\ell_1 = 2\ell_2 = \ell$. Ache a frequência de ressonância dos pulsos gerados no centro da piscina.

Resposta: A velocidade das ondas é

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

Para haver ressonância, o período do pulso deve ser o mesmo tempo que este leva para bater nas bordas da piscina e voltar para o centro. Este tempo é

$$T = \frac{2\ell}{v_s} = \frac{2\ell}{\sqrt{gh}}$$

Note que após este tempo o pulso terá coberto o lado curto da piscina exatamente duas vezes. Assim, a frequência será:

$$\boxed{\nu = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{gh}}{2\ell}} \tag{4}$$

Problema 3: A Via Láctea é uma galáxia em forma aproximada de disco com raio $r \approx 10^{20}$ m e altura $h \approx 10^{17}$ m e $N \approx 2 \times 10^{11}$ estrelas com aproximadamente $d \approx 10^9$ m de diâmetro, e cada uma com aproximadamente $m = 2 \times 10^{30}$ kg. A constante gravitacional é $6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

(a) Suponha que a densidade de estrelas é constante na galáxia e calcule a velocidade das estrelas como função do raio para o centro da galáxia. Assuma órbitas circulares.

Resposta: Pra $h \ll r$ como é o caso, podemos considerar a distribuição efetivamente bidimensional. A quantidade de matéria à distância R do centro será:

$$M(R) = \rho V(R) = \pi \rho R^2 h = M \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

onde $M = Nm$ é a massa total da galáxia. Como é apenas esta massa que uma estrela em órbita circular à distância R do centro sente gravitacionalmente, a velocidade será aquela para a qual a força centrípeta resultante será a atração gravitacional por $M(R)$:

$$m\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)m}{R^2} \Longrightarrow \boxed{v^2(R) = \frac{GM}{r^2}R} \tag{5}$$

(b) Calcule o tempo médio entre colisões das estrelas na Via Láctea. Com base neste número, e sabendo que a Via Láctea tem por volta de 10^9 anos, você espera que a galáxia esteja em equilíbrio térmico?

Resposta: O tempo médio entre colisões é, aproximadamente, o tempo que as estrelas levam para cobrir todo o volume disponível. Após um tempo Δt, o volume coberto por uma estrela na distância R do centro será $v(R)\,\Delta t \cdot \pi d^2$, ou a distância percorrida vezes a seção reta de cada estrela. Um pequeno aro com volume $dV = 2\pi h R\,dR$ terá um número de estrelas proporcional à densidade $\rho = N/\pi r^2 h$, e assim, para calcular o volume total, temos que somar todas essas contribuições

$$dV(\Delta t) = v(R)\,\Delta t \cdot \pi d^2 \cdot N \frac{2\pi h R dR}{\pi r^2 h}$$

Somando agora todas estas contribuições teremos

$$V(\Delta t) = 4\pi d^2 N \sqrt{\frac{GM}{r}}\,\Delta t$$

onde $\rho = N/\pi r^2 h$ é a densidade de estrelas da galáxia. Igualando este volume ao volume total da galáxia, obtemos

$$\boxed{\Delta t = \frac{r^2 h}{4 d^2 N}\sqrt{\frac{r}{GM}} \approx 7{,}67 \times 10^{13}\,\text{anos}} \tag{6}$$

Como este tempo é muito maior que o tempo de vida da galáxia, podemos concluir que a galáxia **não** está em equilíbrio térmico.

Problema 4: O módulo de compressibilidade volumétrica de um gás é definida como a taxa de variação de seu volume com relação à variação de pressão mantendo a temperatura constante:

$$\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{dV}{dp}\right)_T \tag{7}$$

(a) Calcule o módulo de compressibilidade de um gás ideal.

Resposta: Pela equação de estado $pV = nRT$, e assim podemos diferenciar diretamente e achar:

$$\boxed{\beta = \frac{nRT}{Vp^2} = \frac{1}{p}} \tag{8}$$

(b) Invertendo a definição acima, obtemos

$$\Delta F = -\frac{A}{\beta}\frac{\Delta V}{V} \tag{9}$$

que relaciona a variação de volume com aumentos da força aplicada. Calcule a variação percentual de volume em um pneu de carro que suporta 200 kg a 1,9 atm. Dados do pneu: raio menor 23 cm, raio maior 28,5 cm, tamanho da tala 18,5 cm. Para efeitos de cálculo pode-se considerar a área sobre a qual o peso exerce pressão como metade da área interna.

Resposta: Podemos inverter facilmente a expressão e achar ΔV:

$$\Delta V = -\frac{\beta}{A} V \Delta F = -\frac{V}{pA} mg$$

e com um pouco de geometria podemos calcular as quantidades geométricas:

$$V = \pi(R_>^2 - R_<^2)h = 16{,}5\ell, \quad A = \pi R_< h = 0{,}134\,\mathrm{m}^2$$

E assim:

$$\boxed{\Delta V = 0{,}079 \cdot 16{,}5\ell = 1{,}31\ell} \tag{10}$$

Uma diferença de cerca de 8% do volume inicial.