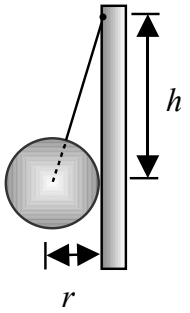
Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Física L2 – Primeira Prova – 19 de julho de 2006

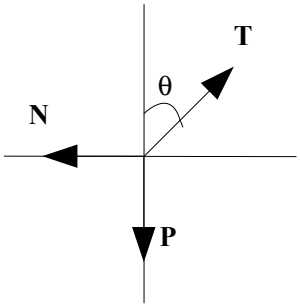
Gabarito.

Problema 1: Uma esfera uniforme de massa m e raio r é mantida em equilíbrio encostada em uma parede vertical, sem atrito, por meio de uma corda de massa desprezível. A distância entre o centro de massa da esfera e o ponto acima do centro onde a corda é fixada na parede é h. Ache:



(a) A tração na corda, em função do peso da esfera e das distâncias h e r.

Resposta: O diagrama de forças é



E as componentes:

$$T\cos\theta - P = 0 \quad (1)$$
$$T\,\mathrm{sen}\,\theta - N = 0 \quad (2)$$

De (1):

$$\boxed{T = \frac{P}{\cos\theta} = P\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{h}} \quad (1)$$

(b) A reação normal da parede sobre a esfera, em função do peso da esfera e das distâncias h e r.

Resposta: De (2):

$$N = T\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{P}{\cos\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta = P\,\mathrm{tg}\,\theta = \boxed{P\frac{r}{h}} \quad (2)$$

(c) O ângulo formado entre a corda e a parede, para o caso em que $r = h$.

Resposta:

$$r = h \Rightarrow N = P \text{ e } \frac{N}{P} = \mathrm{tg}\,\theta = 1, \text{ logo: } \boxed{\theta = 45^\circ} \quad (3)$$

Problema 2: Em 1983 o satélite artificial Cosmos 1402 se partiu em três partes e caiu sobre o Oceano Índico. O satélite estava em órbita circular estável a 300 km de altitude.

Informações úteis:

$$M_\oplus = 5{,}98 \times 10^{24}\ \text{kg}, \quad r_\oplus = 6{,}37 \times 10^{6}\ \text{m}, \quad G_N = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2, \quad 1\ \text{MeV} = 1{,}609 \times 10^{-13}\ \text{J}.$$

(a) Calcule a energia **total** por unidade de massa do satélite em órbita.

Resposta: Em uma órbita circular a força gravitacional é responsável pela aceleração centrípeta. Assim:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GM_\oplus m}{r^2}$$

e a energia total por unidade de massa será:

$$\boxed{\frac{E}{m} = -\frac{1}{2}\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h} = -2{,}99 \times 10^{7}\ \text{J/kg}.} \tag{4}$$

(b) Use a conservação da energia para calcular a velocidade que o satélite atingiu a terra. Despreze os efeitos de atrito pela atmosfera.

Resposta: Ao chegar na Terra, com as aproximações acima, a energia total será a mesma do item anterior, assim:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = -\frac{1}{2}\frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h}$$

E a velocidade v será: $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus}\frac{R_\oplus + 2h}{R_\oplus + h}} = 8090\ \text{m/s}}$.

(c) Houve medo na época devido ao reator de Urânio que o satélite trazia. Calcule a energia cinética **de cada átomo de urânio** na queda. Use $m_\text{U} = 235 \times 936\ \text{MeV}/c^2$ Como esta energia compara com a energia necessária para que o núcleo de urânio sofra fissão nuclear, que é de ≈ 1 MeV?

Resposta: Calculando a energia de um átomo de urânio, temos:

$$E_\text{U} = \frac{1}{2}m_\text{u}v^2 = \frac{GM_\oplus m_\text{u}}{2R_\oplus}\frac{R_\oplus + 2h}{R_\oplus + h}.$$

Substituindo os valores acima, teremos:

$$\boxed{E_\text{U} = 235 \times 936\ \frac{v^2}{c^2}\ \text{MeV} = 1{,}6 \times 10^{-4}\ \text{MeV}.} \tag{5}$$

Que é cerca de dez mil vezes menor que a energia de ativação necessária.

Problema 3: Uma caixa de altura H está cheia de gás e sob ação de um campo gravitacional constante. Devido à lei dos gases ideais, tal gás possui uma relação que nos diz a sua densidade ρ em função de sua pressão P:

$$P = w\rho \tag{6}$$

onde w é uma constante com dimensão de energia por massa (este número é proporcional à temperatura para gases ideais).

Use as condições de equilíbrio para relacionar a pressão a profundidade h com a massa acima desta e a equação de estado para relacionar a densidade com sua derivada. Use $w = 9{,}46 \times 10^4\ \text{m}^2/\text{s}^2$, válido para nossa atmosfera à temperatura ambiente e estime a altura para a qual a densidade atmosférica cairá pela metade ($\ln 2 \approx 0{,}693$).

Resposta: Pela definição de pressão, esta é igual ao peso da coluna de fluido que o elemento de fluido com área seccional unitária deve sustentar. Normalmente, este peso, a uma altura h é $\rho g(H - h)$, mas agora a densidade ρ varia com a altura. Para calcular o peso, podemos usar um raciocínio diferencial, e chegar a

$$P = \int_H^h \rho(h')g\ dh'$$

onde explicitamos a dependência da densidade com a altura. Usando a equação de estado, temos uma *equação integral* para ρ:

$$\rho = -\frac{1}{w}\int_h^H \rho(h')g dh'.$$

Diferenciando ambos os lados em relação a h e usando o teorema fundamental do cálculo, teremos a relação entre ρ e sua derivada:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dh} = -\frac{g}{w}\rho}. \tag{7}$$

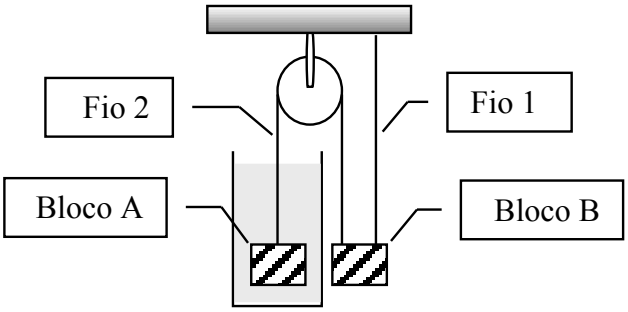
As soluções desta equação são funções exponenciais:

$$\rho(h) = \rho_0\ e^{-gh/w}$$

e então a densidade cairá pela metade quando $gh_{\frac{1}{2}}/w = \ln 2$, o que resulta, para os valores dados:

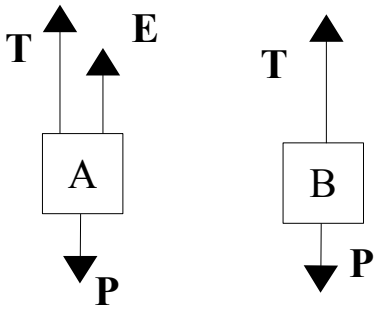
$$\boxed{h_{\frac{1}{2}} = 6{,}6 \times 10^3 \text{ m} = 6{,}6 \text{ km}.} \tag{8}$$

Problema 4: O sistema da figura está inicialmente em equilíbrio. Os corpos A e B são idênticos (massas 3,0 kg) e constituídos de uma substância de densidade $1{,}5 \times 10^4$ kg/m^3. A densidade do líquido onde se encontra totalmente mergulhado o corpo A é $6{,}0 \times 10^2$ kg/m^3 e todos os atritos e resistências são desprezíveis. Após cortar o fio 1, calcule:



(a) A aceleração dos corpos, enquanto o corpo A estiver submerso.

Resposta: O diagrama de forças é:



$$E + T - P = ma \quad (1)$$
$$P - T = ma \quad (2) \quad \Rightarrow \quad (1) + (2)\text{: } E = 2ma$$
$$E = \rho_L g V_L = 2ma \Rightarrow \rho_L g\frac{m}{\rho} = 2ma \Rightarrow a = \frac{1}{2}\frac{\rho_L}{\rho}g.$$
$$A = \frac{1}{2}(6 \cdot 102/1{,}5 \cdot 104) \cdot 10 \Rightarrow \boxed{a = 0{,}2 \text{ m/s}^2}. \tag{9}$$

(b) A tração no fio 2, enquanto o corpo A estiver submerso.

Resposta: De (2):

$$T = P - ma = mg - ma \Rightarrow T = m(g - a).$$
$$T = 3(10 - 0{,}2) = 3.9{,}8 \Rightarrow \boxed{T = 29{,}4 \text{ N}}. \tag{10}$$