Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Física L2 – Primeira Prova – 19 de julho 2006

Gabarito.

Problema 1: Um carro de massa m acelera à taxa de a. O centro de massa do carro se situa na metade da largura, a uma distância d_1 do eixo dianteiro e a uma distância horizontal d_2 do eixo traseiro, a uma altura de h.

(a) Cacule as forças **normais** nos eixos dianteiro e traseiro, assumindo $d_1 < d_2$.

Resposta: Um esquema do carro está abaixo: O ponto principal é que, como a aceleração é constante,

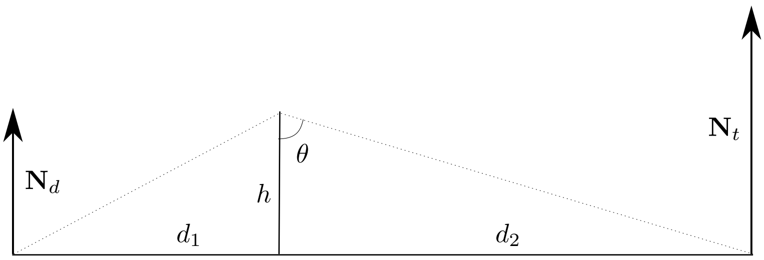


Figura 1:

podemos imaginá-la atuando no centro de massa. Assim, a condição de equílibrio pode ser usada para calcular as normais. Como vimos, teremos que balancear as forças *na direção vertical* e os torques. O balanço de forças na vertical diz-nos somente que:

$$N_t + N_d = mg \tag{1}$$

que é a mesma condição de equilíbrio estático. Quando o carro acelera, contudo, há uma tendência ao giro sobre o ponto de contato do eixo traseiro que deve ser equilibrado. Este giro é melhor percebido em uma bicicleta, mas a física envolvida é exatamente a mesma. Calculando a única componente dos torques de cada uma das forças *em relação ao eixo traseiro* temos:

$$\tau_g = mg\sqrt{h^2 + d_2^2}\cos\theta = -mgd_2$$
$$\tau_a = ma\sqrt{h^2 + d_2^2}\,\mathrm{sen}\theta = mah$$
$$\tau_d = N_d(d_1 + d_2)$$

Resolvendo (1) e $\tau_g + \tau_a + \tau_d = 0$ temos:

$$\boxed{N_d = m\frac{gd_2 - ah}{d_1 + d_2}, \quad N_t = m\frac{gd_1 + ah}{d_1 + d_2}.} \tag{2}$$

(b) Com base no resultado acima, argumente sobre a capacidade de cada eixo em freiar o carro. Qual dos dois terá um desgaste maior nos pneus?

Resposta: Tomando a razão entre N_d e N_t, temos

$$\frac{N_d}{N_t} = \frac{gd_2 - ah}{gd_1 + ah}$$

que é sempre maior que 1 para frenagens $a < 0$, já que $d_2 > d_1$. Assim, a normal dianteira é maior que a normal traseira, e, como aprendemos, a força máxima de atrito estático será maior no $\boxed{\text{eixo dianteiro, que terá maior capacidade de freiar o carro}}$ e como consequência, apresentará um $\boxed{\text{maior desgaste de pneus}}$.

Problema 2: A maior velocidade de rotação possível para um planeta é aquela em que a força gravitacional exercida sobre a matéria em seu equador é exatamente igual à força centrípeta necessária para manter essa matéria em rotação, agregada ao planeta.

(a) Ache o período de rotação mínimo do planeta para que a matéria não escape, em função de sua densidade ϱ.

Resposta:

$$F_G = F_{CP} \Rightarrow \frac{GM_P m}{R_P^2} = \frac{mv^2}{R_P} \Rightarrow \frac{2\pi R_P}{T^2} = \frac{GM_P}{R_P} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{GM_P} = \frac{T_P^2}{R_P^3}$$

$$\frac{T_P^2}{R_P^3} = \frac{4\pi^2}{GM_P} \Rightarrow T_P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_P} R_P^3 = \frac{3\pi V_P}{GM_P} = \frac{3\pi}{G\varrho}$$

$$\boxed{T_P = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}.} \tag{3}$$

(b) Estime o período de rotação de um objeto astronômico como a Lua cuja densidade é de $\varrho = 3\ \text{g/cm}^3$, que é típica de planetas, satélites e asteróides.

Resposta:

$$T_P = \left(\frac{3\pi}{G\varrho}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow T_P = 6{,}5 \times 10^3\ \text{s} = 108\ \text{min} = \boxed{1{,}8\ \text{h}}. \tag{4}$$

Problema 3: Um líquido de densidade ρ começa a girar em torno de um eixo fixo. Chame a distância de um elemento de fluido a este eixo de r.

(a) Calcule a densidade de momento angular deste elemento de fluido, assumindo que a velocidade é sempre tangente, isto é, o elemento está em movimento circular uniforme.

Resposta: Se um elemento de fluido de massa m está em movimento circular uniforme a uma distância r do eixo, então seu momento angular L será:

$$L = mvr$$

cujo vetor aponta na direção do eixo de rotação. Dividindo este resultado pelo volume do elemento de fluido, teremos a densidade de momento angular:

$$\boxed{\ell = \rho v r} \tag{5}$$

(b) Assuma que a densidade de momento angular é a mesma para o todos os elementos do fluido e calcule a velocidade angular como função de r e da densidade de momento angular ℓ.

Resposta: Usando a equação acima, e resolvendo para v:

$$\boxed{v = \omega r = \frac{\ell}{\rho r}} \tag{6}$$

lemos a velocidade angular ω.

(c) Use a equação de Bernoulli para calcular a pressão P como função de r e da profundidade h. Esboce o gráfico da superfície $P =$ constante no plano $r - h$. Este perfil está de acordo com sua intuição sobre vórtices em líquidos?

Resposta: A equação de Bernoulli nos diz que a quantidade

$$\frac{1}{2}\rho v^2 - \rho g h + P(r,h) = P_{\text{atm}}$$

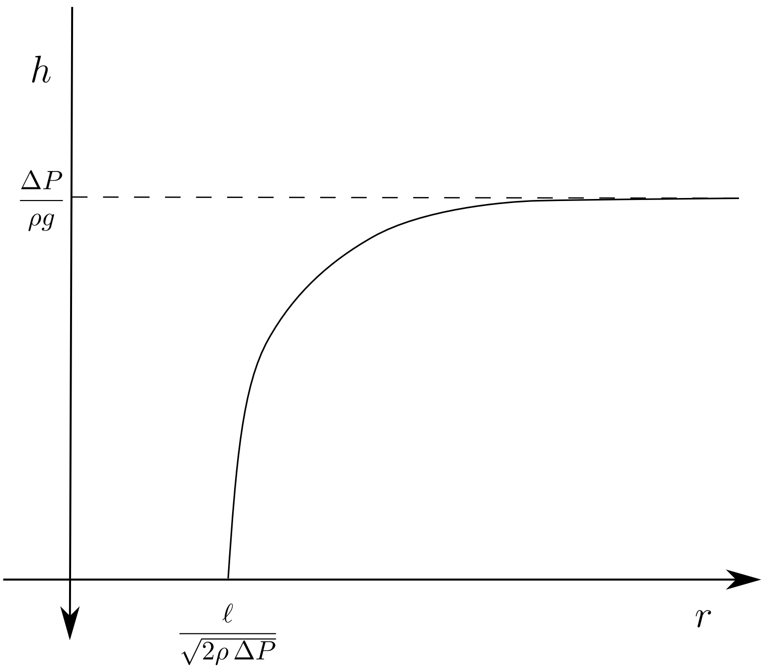
é uma constante em qualquer posição do fluido. Esta constante será pressão do fluido a profundidade zero e longo do eixo de rotação quando $v \to 0$, e o subescrito atm vem do fato que esta pressão é a pressão atmosférica. Substituindo a resposta para v no problema acima, teremos a pressão como função de r e h:

$$\boxed{P(r,h) = P_{\text{atm}} - \frac{\ell^2}{2\rho r^2} + \rho g h.} \tag{7}$$

Para $P(r,h)$ constante, podemos inverter a equação e achar h em função de r:

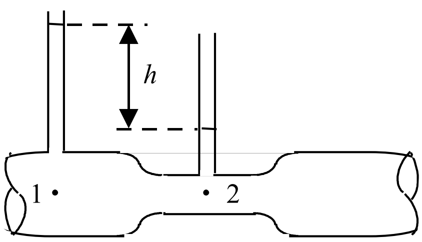
$$h = \frac{\Delta P}{\rho g} + \frac{\ell^2}{2\rho^2 g r^2}$$

cujo gráfico é:



Que realmente lembra o perfil de um vórtice. Em situações reais, ΔP deve ser consideravelmente maior que zero para quebrar a barreira da tensão superficial do fluido, e assim não se vê redemoinhos com pequenas velocidades angulares.

Problema 4: Um cano de água, com área de seção reta A_1, possui um estrangulamento cuja área mínima de passagem é A_2. Sobre o cano da área A_2 há um tubo aberto, bem como sobre o estrangulamento de área A_2, conforme a figura. Admita que o escoamento do fluido seja ideal e calcule a diferença de pressão hidrostática ($\varrho g h$) entre os pontos 1 e 2, em função da velocidade de entrada no cano (v_1), das áreas do cano (A_1) e do estrangulamento (A_2) e da densidade do fluido ϱ.



Resposta:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

e

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Então

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho\left[v_1^2\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - v_1^2\right] = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]$$

$$\boxed{P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2\left[\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1\right]} \tag{8}$$